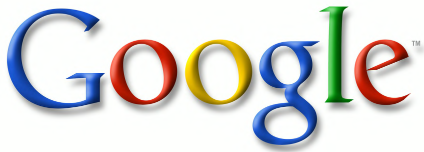


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

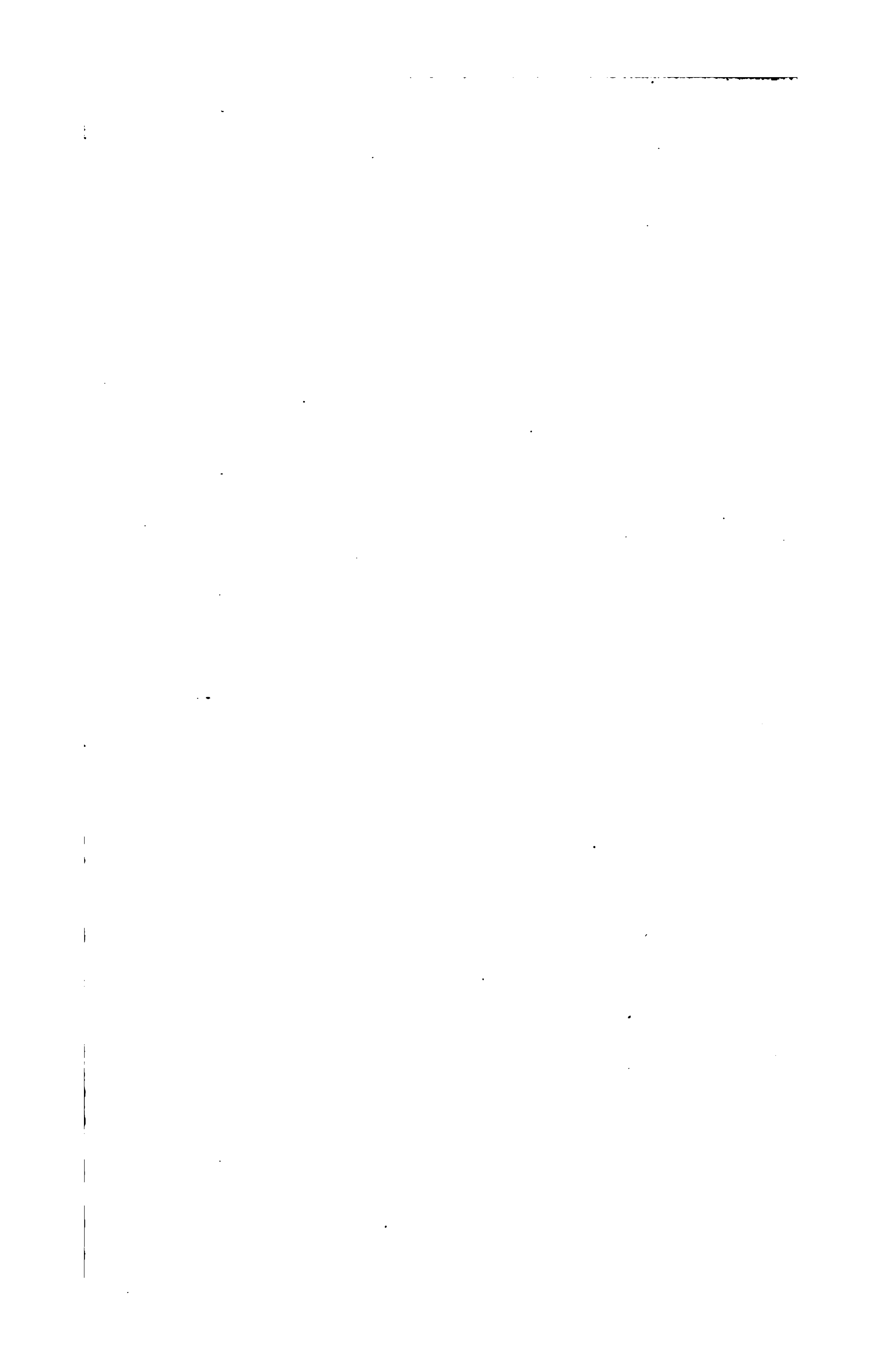
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



578

Per. 1875 d. 112
5R.3.4



B 578

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

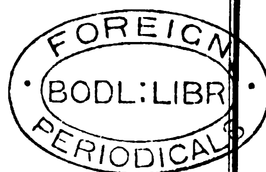
UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Tredje Aargang.



KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1885.

FØRSTE HEFTE.

3

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

TIDSSKRIFT

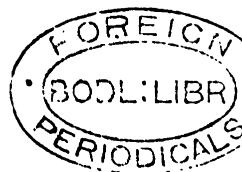
FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**



FEMTE RÆKKE.

TREDIE AARGANG.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1885.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

FEMTE RÆKKE.

TREDIE AARGANG.

1885.

Indhold.

Side

Axel Arneberg, stud. math.:
Integration af en Differentialligning 168
A. S. Bang, exam. polyt.: (Se: Løste Opgaver).
Kr. Birkeland, stud. phil. i Kristiania: (Se Løste Opgaver).
E. Buchwald, Adjunkt i Horsens: (Se: Opgaver til Brug ved Undervisningen).
F. Buchwaldt, Oberstløjtnant, i Fredericia:
Om Potenser af uendelige og endelige Rækker og om Rækker for omvendte Funktioner 65
S. A. Christensen, cand. mag.:
Et Bevis hos Archimedes 47
Indførelsen af Decimalbrøker i Danmark. 149
(Se desuden: Opgaver til Løsning).
C. Crone, dr. phil.:
Om Eulers Sætning om Polyedre 44
Frans: (Se: Løste Opgaver).
J. P. Gram, dr. phil.:
Redaktionsbemærkninger, Opgaver m. m.
A. S. Guldberg, Lærer ved Krigsskolen i Kristiania:
Om Ligninger, hvis Rødder kunne fremstilles ved et med Cardans Formel analogt Udtryk 39
Carl Haase, dr. phil., Augsburg:
Elementare Beweise der Sätse von Brianchon und Pascal 23
J. L. W. V. Jensen, Civilingeniør:
Om Grænseværdi og irrationale Tal 33
(Se desuden: Opgaver til Løsning).
C. Juel, dr. phil.: (Se: Løste Opgaver).
A. Olsson, fil. kand., i Upsala:
Från fysisk-matematiska föreningen i Upsala. III . . 161
Jul. Petersen, dr. phil., Docent ved polyteknisk Læreanstalt:
Om Algebraens Grundprinciper 1
En Modbemærkning 152
H. C. F. C. Schjellerup, dr. phil., Professor, Observator:
(Se: Opgaver til Brug ved Undervisningen).
Adolph Steen, dr. phil., Professor ved Universitetet:
Et Bevis for Newtons Sætninger om symmetriske Funktioner af en Lignings Rødder 30
(Se desuden: Mindre Meddelelser).

Side

Axel Thue, stud. real., Kristiania:
Et Theorem om netformige Figurer 102
En Dualisme i den absolute Geometri 120
(Se desuden: Opgaver til Løsning).

E. C. Valentiner, cand. mag.:
En Bemærkning om Antallet af Spidser paa en Kurve af Ordenen n og Slægten p 179
(Se desuden: Løste Opgaver).

H. G. Zeuthen, dr. phil., Professor ved Universitetet:
En Udledelse af Duhamels Konvergensbetingelse. . . 147
Nogle Bestemmelser af Pyramidens Volumen 175
(Se desuden: Mindre Meddelelser).

Opgaver til Løsning.

520, 521 (Thue, Jensen) 64
522, 523, 524 (Christensen, Jensen) 160

Løste Opgaver.

466, 498 (Bang) 31
399, 458, 490, 512, 514, 515, 511 (Bang, Juel, Frans) 154
86, 462 (Birkeland, Valentiner) 182

Opgaver til Brug ved Undervisningen.

44, 45, 46 (Schjellerup) 64
47, 48 (Buchwald) 160

Examensopgaver.

Polyteknisk Afgangsexamen, Septbr. 1884 og Jan. 1885 50
Almindelig Forberedelsesexamen, Januar 1885 54
do. do. Marts 1885 59
Skolelærerexamen, Maj 1885 61
De lærde Skolers Afgangsexamen, Juni 1885 106
4de Klasses Examen og Alm. Forberedelsesexamen, Juni 1885 . . 110
Adgangsexamen til Polyteknisk Læreanstalt, Juni 1885. 114
Institutbestyrerindeexamen, Dcbr. 1885 180

Literatur. Bogfortegnelse for 1884. 187
Mindre Meddelelser (Zeuthen, Steen) 125
Rettelser 192



Oversigt over de numererede Opgaver i tidligere Aargange, som ikke ere løste:

2den Række 1ste Aargang:

Nr. 101	Side 16
- 121	— 176

2den Række 2den Aargang:

Nr. 127	Side 96
- 145	— 144
- 166	— 192

2den Række 3die Aargang:

Nr. 176	Side 178
- 181	— 179
- 195	— 182
- 200	— 183
- 208	— 184

2den Række 4de Aargang:

Nr. 227	Side 191

2den Række 5te Aargang:

Nr. 230	Side 177
- 241	— 179
- 244	— 180
- 261	— 183
- 263	— 184
- 264	— 184
- 266	— 185
- 271	— 185
- 272	— 185
- 274	— 186
- 275	— 186
- 277	— 186
- 278	— 187
- 279	— 187
- 281	— 187
- 283	— 188
- 284	— 188
- 285	— 188
- 286	— 188
- 287	— 188

2den Række 6te Aargang:

Nr. 288	Side 94
- 289	— 94

3die Række 1ste Aargang:

Nr. 292	Side 29
- 293	— 30
- 297	— 60
- 304	— 93
- 308	— 141
- 311	— 192
- 312	— 192

3die Række 2den Aargang:

Nr. 313	Side 78
- 314	— 78
- 315	— 78
- 316	— 79
- 319	— 109
- 321	— 140
- 324	— 141
- 330	— 190

3die Række 3die Aargang:

Nr. 338	Side 94
- 341	— 139
- 342 (Rettet S. 160)	— 139
- 345	— 140
- 346	— 140
- 348	— 140
- 351	— 141

3die Række 4de Aargang:

Nr. 354	Side 26

3die Række 5te Aargang:

Nr. 368	Side 152

3die Række 6te Aargang:

Nr. 373	Side 73
- 376	— 128

4de Række 1ste Aargang:

Nr. 379 . . . . Side 57
- 380 . . . . — 57
- 383 . . . . — 180
- 384 . . . . — 180
- 385 . . . . — 180

4de Række 2den Aargang:

Nr. 387 . . . . Side 61
- 392 . . . . — 127
- 393 . . . . — 127

4de Række 3die Aargang:

Nr. 400 . . . . Side 79
- 401 . . . . — 79
- 403 . . . . — 108
- 404 . . . . — 108
- 405 . . . . — 109
- 406 . . . . — 109
- 407 . . . . — 109
- 408 . . . . — 182
- 409 . . . . — 183
- 410 . . . . — 183
- 411 . . . . — 183
- 413 . . . . — 184

4de Række 4de Aargang:

Nr. 414 . . . . Side 143
- 415 . . . . — 144
- 417 . . . . — 144
- 418 . . . . — 144
- 422 . . . . — 173
- 428 . . . . — 192
- 429 . . . . — 192

4de Række 5te Aargang:

Nr. 431 . . . . Side 27
- 432 (Rettet S. 96) . — 27
- 433 . . . . — 59
- 434 (Rettet S. 96) . — 59
- 435 . . . . — 59

Nr. 443 . . . . Side 60
- 445 . . . . — 60
- 446 . . . . — 60
- 447 . . . . — 60
- 448 . . . . — 129
- 449 . . . . — 130
- 450 . . . . — 130
- 451 . . . . — 130
- 452 . . . . — 130
- 453 . . . . — 130
- 454 . . . . — 130
- 455 . . . . — 131

4de Række 6te Aargang:

Nr. 460 . . . . Side 29
- 461 . . . . — 29
- 464 . . . . — 30
- 480 . . . . — 73
- 481 . . . . — 73
- 486 . . . . — 185
- 491 . . . . — 185
- 495 . . . . — 186

5te Række 1ste Aargang:

Nr. 496 . . . . Side 63
- 497 . . . . — 63
- 499 . . . . — 92
- 500 . . . . — 92
- 501 . . . . — 92
- 502 . . . . — 92
- 503 . . . . — 92
- 504 . . . . — 92
- 505 . . . . — 92
- 507 . . . . — 172
- 508 . . . . — 172
- 509 . . . . — 172

5te Række 2den Aargang.

Nr. 510 . . . . Side 32
- 518 . . . . — 188
- 519 . . . . — 188

TIDSSKRIFT
FOR
MATHEMATIK.



OM ALGEBRAENS GRUNDBEGREBER.

(AF JULIUS PETERSEN).

1. Efter min Opfattelse er Algebraen Læren om Tegnsprog; da der imidlertid er Tegnsprog, som jeg ikke vil kalde Algebra, maa jeg give den nævnte Definition nogen Begrænsning, og denne vil jeg sætte i følgende:

1) Sproget maa indeholde Betegnelser, som kunne anvendes til at karakterisere Individerne i en eller flere, endelige eller uendelige Grupper. Betegnelserne i selve Algebraen have kun den Betydning, at de karakterisere noget forskjelligt; først ved Anvendelserne bliver det forskjellige nærmere bestemt, f. Ex. som de forskjellige Omsætninger af et givet Antal Elementer (endelig Gruppe), en Kurves Punkter eller Tangenter (enkelt uendelig Gruppe), en Plans Punkter (dobbelt uendelig Gruppe), Rummets Punkter eller dets Drejninger om et fast Punkt (tredobbelt uendelige Grupper) o. s. v.

2) Sproget maa indeholde Betegnelser for visse Operationer, ved hvilke Gruppernes Individer sættes i Forbindelse med hverandre.

3) Sproget maa indeholde Identitetstegnet =, der angiver, at de derved forbundne Individer ere identiske eller i al Fald ved den Undersøgelse, man er ifærd med, kunne opfattes som identiske (et Tikronestykke og en Tikroneseddel ved et Formuespørgsmaal).

4) Der maa være givet visse Grundligninger, som karakterisere de Grupper, man behandler. Disse Grundligninger kunne vælges vilkaarlig; vil man anvende Algebraen paa en vis Gruppe af

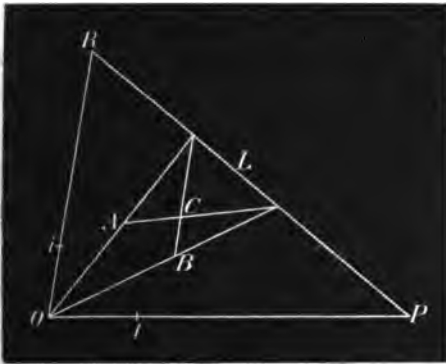
Individer, maa man da undersøge, om denne Gruppe har de ved Grundligningerne udtrykte Egenskaber. I Praxis er Vejen naturligvis i Reglen den modsatte, idet man danner Grundligninger med Hensyn til en bestemt Anvendelse, som man har for Øje. Man danner Grundligningen $a + b = b + a$, fordi man træffer den derved udtrykte Egenskab ved mangfoldige Grupper; en Algebra, der havde Grundligningen $a + b = b - a$, var videnskabelig talt ligesaa berettiget som den anden, men vilde kun sjeldent finde Anvendelse.

Enhver Algebra maa forudsætte Arithmetiken, i al Fald for de hele Tals Vedkommende, thi da den behandler visse Operationer, maa disse kunne gjentages, og saa snart som man har Gjentagelsen, har man Tallet (Antallet).

2. Da Algebraens videre Udvikling alene bygges paa Grundligningerne og føres videre ad rent logisk Vej, blive saadanne Grupper, hvis Individer entydig svare til hinanden, ensgjældende, thi naar man opererer med Individerne i den ene Gruppe, kan man lige saa godt tænke sig, at man opererede med de tilsvarende Individer af den anden Gruppe. Saaledes vil den almindelige Algebra, der behandler en enkelt uendelig Gruppe af Individer, der repræsenteres ved en ret Linies Punkter, lige saa godt kunne anvendes paa enhver Kurve af Slægten Nul; Betydningen af Operationstegnene maa da udledes af den Lov, der bestemmer, hvorledes Punkterne parvis svare til hinanden; alle den rette Linies Punkter kunne repræsenteres ved de reelle Tal; det samme gjælder da, paa Grund af Entydigheden, om den tilsvarende Kurves Punkter. Have vi for tre Punkter paa den rette Linie $a + b = c$, gjælder den samme Ligning for de tilsvarende Punkter paa Kurven, og derved er den ved Tegnet + betegnede Operation paa Kurven bestemt. En ny Gruppe, der kræver en ny Algebra, haves i Kurverne af Slægten 1; medens man dog her endnu kan have $a + b = c$ (de elliptiske Integralers Addition), gjælder dette næppe om Kurver af højere Slægt; ved disse tror jeg ikke, at det er muligt, ved nogen Operation, af to vilkaarlig givne Punkter paa Kurven entydig at bestemme et tredje.

3. Idet man dannede den til en ret Linies Punkter eller til de reelle Tal hørende Algebra, viste det sig snart, at en af de Operationer, som man naturlig ledede til at betragte, (Roduddragning) ikke altid var mulig. Man foretog da først den nødvendige rent formelle Udvidelse, idet man indførte de imaginære Størrelser, men selve disses Navn viser, at man ikke rigtig forstod, hvad man gjorde; man havde foretaget en Udvidelse til en dobbelt uendelig Gruppe af Individer, uden at dette stod rigtig klart. Først da man bemærkede, at man i en Plans Punkter har en saadan dobbelt uendelig Gruppe, som svarer til den udvidede Algebra, fik man den rette Forstaaelse. Da det i flere Henseender er lærerigt at se den udvidede Algebra opbygget fra Grunden af, skal jeg her gjøre det i Korthed under en mere almindelig Form end den sædvanlige.

I. Komplexe Tal.



4. For at kunne gjøre Forskjel mellem Planens Punkter, vælge vi en fast Linie L og udenfor denne et fast Punkt O. Af to vilkaarlige Punkter A og B kunne vi da entydig bestemme et tredje C paa den ved Figuren viste Maade. Bruge vi $+$ til at betegne den udførte Operation, have vi da

$$A + B = C.$$

Man ser let, at man har

$$A + B = B + A,$$

og kan, hvad jeg ikke skal opholde mig ved, bevise, at

$$A + (B + C) = A + B + C.$$

Da disse to Ligninger falde sammen med Algebraens to første, af hinanden uafhængige Grundligninger, er Valget af Tegnet $+$ tilstrækkelig forklaret.

Et Punkt, som, adderet til et andet Punkt, ikke forandrer dette, kalde vi 0; dette gjælder om Punktet O.

Et Punkt, der ikke forandres ved, at et vilkaarligt Punkt adderes til det, kalde vi ∞; dette gjælder om alle Punkter af L, som vi derfor ville kalde Uendelighedslinien. Man ser let, at Summen af to forskjellige Punkter ∞ atter er uendelig, men ubestemt.

Man kan nu paa sædvanlig Maade indføre Subtraktion og udvikle de sædvanlige Formler. Man ser let, at $\infty - \infty$ er ubestemt ∞, naar de to Punkter ∞ ere forskjellige, men ubestemt endelig, naar de falde sammen.

Hidindtil have vi maattet tænke os et Navn for ethvert Punkt; vi simplificere nu vort Sprog paa følgende Maade:

Fra O trække vi to vilkaarlige Linier OP og OR. Ethvert Punkt kan da opløses i en Sum af to, et paa hvert af de to valgte Linier. Vi behøve derfor kun Betegnelser for alle Punkter i disse to Linier for at have Betegnelser for alle Planens Punkter.

To Punkter i samme Linie gjennem O have en Sum, der ligger paa samme Linie, men som ikke bestemmes ved den oprindelige Konstruktion. Summen kan imidlertid bestemmes enten som Grænsetilfælde eller ved, at man adderer et udenfor Linien liggende Punkt og bagefter atter subtraherer det. Vi kunne derfor udtrykke alle Punkter i en saadan Linie ved ka, hvor a er et vilkaarligt af Liniens Punkter (blot ikke 0 eller ∞) og k et reelt Tal. Vi kunne nemlig af a danne $a + a = 2a$, $2a + a = 3a$ o. s. v. og paa sædvanlig Maade udvide til brudne og irrationale Værdier af k. Vi faa saaledes, idet vi i de to Linier vælge et Punkt, som vi kalde 1, og et, som vi kalde i, alle Planens Punkter bestemte ved Udtryk af Formen

$$a + ib,$$

hvor a og b ere reelle Tal. Det saaledes dannede komplexe Tal svarer entydig til alle Planens Punkter. Med disse Tal kunne vi nu operere paa alle Maader ved Addition, Subtraktion, samt Multiplikation og Division med reelle Tal. Linien OP kalde vi de reelle Tals Axe, Linien OR de imaginære Tals Axe. Tænke vi os L

uendelig fjærn og OP og OR vinkelrette paa hinanden samt $Oi = O1$, have vi den sædvanlige Fremstilling af de komplexe Tal; underkaste vi denne en almindelig lineær Transformation (Centralprojektion), faa vi den her givne Udvikling; deraf følger, at i Punktet ka betegner k Punktets Dobbeltforhold til O, a og Liniens Punkt ∞. Punktet -1 bliver det Punkt, der med $+1$ deler $O\infty$ harmonisk.

5. Vi søge nu at udvide vor Multiplikation og derved vor Division saaledes, at vi kunne multiplicere to vilkaarlige Punkter. Vi ville her søge at opnaa, at de sædvanlige Regler for Regning ogsaa gjælde for Udvidelsen, saa at vi skulle have

$$(a+bi)(a_1+b_1i) = aa_1 + (ab_1+ba_1)i + bb_1i^2.$$

Skal dette Udtryk have Betydning, maa i^2 være et Punkt, eller man maa sætte

$$i^2 = \alpha i + \beta;$$

her ere α og β vilkaarlige reelle Tal, naar blot Ligningen har imaginære Rødder; naturligst er det at sætte

$$i^2 = -1,$$

og vi kunne nu fortsætte Algebraens Udvidelse paa sædvanlig Maade.

Vi kunne, idet vi bruge Ordet Gruppe i en ny Betydning, sige, at vort dobbelt uendelige System af Individer i Forbindelse med de til Regningsarterne svarende Operationer danne en **Gruppe**, idet vi derved udtrykke, at vi, ved at anvende Operationerne paa Individerne i en hvilken som helst Rækkefølge, altid blive indenfor Gruppen af Individer. Gruppebegrebet spiller paa alle Punkter af Mathematiken en meget fremragende Rolle. Da en Gruppe væsentlig karakteriseres af de i den indeholdte Undergrupper, ville vi her søge saadanne. Vi have allerede set, at Punkterne paa enhver ret Linie gjennem O lige over for Addition og Subtraktion samt Multiplikation og Division med reelle Tal danne en Gruppe af enkelt uendelig mange Individer. Vi skulle nu vise, at der ogsaa gives en enkelt uendelig Undergruppe over for Multiplikation og Division.

Vi have

$$(a+bi)(a_1+b_1i) = aa_1 - bb_1 + (ab_1+ba_1)i.$$

Nu er $(aa_1 - bb_1)^2 + (ab_1 + ba_1)^2 = (a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2)$. Denne Ligning viser, at de Punkter, for hvilke

$$a^2 + b^2 = 1,$$

danne en Gruppe, idet Produktet og Kvotienten af to saadanne Punkter atter bliver et til Gruppen hørende Punkt. Jeg skal ikke opholde mig ved at vise, at den fundne Gruppe bestaar af Punkterne paa en Ellipse, der naturligvis indeholder Punkterne $+1$, -1, $+i$ og $-i$. Denne Ellipses Punkter kunne benyttes til at karakterisere de fra O udgaaende Linier, idet vi sætte

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,i\right),$$

hvori Punktet i Parenthesen ligger paa Ellipsen.

Jeg skal nu ikke fortsætte disse Undersøgelser videre, da det ikke er min Hensigt at give en fuldstændig Udvikling, men kun at bidrage til at fremstille Begreberne med den Almindelighed, der tilkommer dem, og til at vise, i hvilken Grad de snævre Synspunkter have været hæmmende for Videnskabens Udvikling. Vi have kun behøvet at begynde vore Undersøgelser fra et almindeligt Synspunkt for, efter nogle faa Skridt, at staa lige ved Indgangen til mange af de Gebeter, som Videnskaben først i den senere Tid har erobret. Trilineære Koordinater, Keglesnittenes Transformation i sig selv, Slægtbegrebet for Kurver o. s. v. ere saaledes Ting, der næsten umiddelbart frembyde sig for os.

Jeg skal nu gaa over til at betragte et tredobbelt uendeligt System, repræsenteret ved Rummets Punkter; jeg kunde her behandle Systemet fra et ligesaa almindeligt Synspunkt som det plane System, men vil, da jeg nu engang har gjennemført den almindelige Behandling, her benytte et sædvanligt retvinklet Koordinatsystem.

II. Ternioner.

I de tre Axer vælge vi Punkterne 1, α og β i Afstandene 1 fra Nulpunktet. Naar vi da repræsentere et Punkt med Koordinaterne x, y og z ved

$$x + \alpha y + \beta z,$$

og ved

$$OA + OB = OC$$

udtrykke, at OC er Diagonal i det ved OA og OB bestemte Parallelogram, se vi let, at de sædvanlige Regler for Addition og Subtraktion kunne anvendes. De treleddede Tal, vi saaledes have dannet, ville vi kalde Ternioner; de svare entydig til Rummets Punkter. Ternionen kan ogsaa siges at bestemme Linien fra O til Punktet i Størrelse og Retning. Opfatter man den som en Kraft, kommer Additionen til at svare til Sammensætning af Kræfter. Ternionerne ses let at danne en Gruppe lige over for Addition og Subtraktion samt Multiplikation og Division med reelle Tal.

7. Vi ville nu søge at udvide vore Begreber, saa at vi ogsaa kunne multiplicere og dividere vilkaarlige Ternioner og derved atter komme til Ternioner; navnlig ville vi søge at gjøre Udvidelsen saaledes, at de sædvanlige Regler vedblive at gjælde; særlig fordre vi saaledes, at Produktet af et Antal Ternioner skal være uafhængigt af Faktorernes Orden, og at vore Operationer i Almindelighed skulle være entydige. Denne Fordring udelukker naturligvis ikke, at der, ligesom i Planen for $O : O$ o. s. v., kan være Undtagelsestilfælde, hvor Resultaterne ere flertydige.

Dersom Produktet af to Ternioner atter skal være en Ternion, maa nødvendigvis Udtrykkene

$$\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2$$

antage Ternionform. Vi maa altsaa sætte tre Ligninger af Formen

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= a\alpha + b\beta + c \\ \alpha\beta &= a_1\alpha + b_1\beta + c_1 \\ \beta^2 &= a_2\alpha + b_2\beta + c_2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Her kunne Koefficienterne ikke vælges vilkaarlig, da der er en Relation mellem Størrelserne paa venstre Side af Lighedstegnene. Skulle vore Fordringer opfyldes, maa Koefficienterne vælges saaledes, at man, naar man ved Hjælp af Ligningerne bringer et Udtryk af Formen $\alpha^m\beta^n$ paa Ternionform, altid faar den samme Form, uafhængig af Ordnen. Jeg skal ikke opholde mig ved at udvikle den almindelige Betingelse herfor, der er temmelig sam-

mensat; den kan tilfredsstilles paa forskjellig Maade; jeg skal her betragte en af de simpleste, som vi faa, naar vi sætte

$$\alpha^2 = \beta;\ \beta^2 = \alpha;\ \alpha\beta = 1. \qquad (2)$$

Vi maa vel erindre, at vi her ikke have noget at gjøre med Planens $\sqrt{-1}$. α og β ere, som Ligningerne (2) vise, Rødder i

$$z^3 - 1 = 0,$$

men kunne ikke udtrykkes ved $\sqrt{-1}$; i Planen er Summen af Rødderne i den angivne Ligning Nul, men her se vi let, at $1 + \alpha + \beta$ er et fra Nul forskjelligt Punkt.

Vi faa nu

$$(x + \alpha y + \beta z)(x_1 + \alpha y_1 + \beta z_1) = X + \alpha Y + \beta Z, \qquad (3)$$

hvor

$$\left.\begin{aligned} X &= xx_1 + yz_1 + zy_1 \\ Y &= xz_1 + yy_1 + zx_1 \\ Z &= xy_1 + yx_1 + zz_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Man har nu identisk

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Z & Y \\ Y & X & Z \\ Z & Y & X \end{vmatrix} \qquad (5)$$

eller

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1y_1z_1) = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ. \qquad (6)$$

Vi se heraf, at de Punkter, der ligge paa Fladen

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1, \qquad (7)$$

danne en Undergruppe lige over for Multiplikation og Division, idet Produktet af to Punkter paa denne Flade atter er et Punkt af Fladen, som saaledes ved et dobbelt uendeligt Antal lineære Transformationer gaar over i sig selv. En anden Undergruppe finde vi ved Addition af de tre Ligninger, der giver

$$(x + y + z)(x_1 + y_1 + z_1) = X + Y + Z. \qquad (8)$$

Vi ville kalde $x + y + z = n$ Ternionens første Modulus og have da, at: Produktets første Modulus er Produktet af Faktorernes første Moduler.

Første Modulus er Nul for alle Punkter i Planen

$$x + y + z = 0,$$

som vi ville kalde Nulplanen. Den angivne Sætning viser, at et Produkt falder i Nulplanen, naar en af Faktorerne ligger i den.

7. Bortdividerer man $x + y + z$, af det tredje Grads Udtryk ovenfor, faar man

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz,$$

som, sat lig 1, er Ligningen for en cirkulær Cylinder med Axen $x = y = z$ og bestemmer en ny Undergruppe. Vi sætte

$$m = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz} \tag{9}$$

og kalde m Ternionens anden Modulus. Vi have da, at

Produktets anden Modulus er Produktet af Faktorernes tilsvarende Moduler.

Den anden Modulus bliver kun Nul for Linien $x = y = z$. Vi kalde denne Linie Nullinien og se, at et Produkt ligger i Nullinien, naar en af Faktorerne ligger der, og at Produktet af et Punkt i Nullinien og et Punkt i Nulplanen er Begyndelsespunktet, idet dette har begge sine Moduler lig Nul.

Længden af den Linie, der forbinder Begyndelsespunktet med det ved en Ternion bestemte Punkt, afhænger af de to Moduler. Man faar nemlig for Afstanden fra Nulplanen

$$\xi = \frac{n}{\sqrt{3}} \tag{10}$$

og for Afstanden til Nullinien

$$\eta^2 = \frac{2}{3} m^2 \tag{11}$$

og deraf for den søgte Længde

$$l^2 = \xi^2 + y^2 = \frac{n^2 + 2m^2}{3}. \tag{12}$$

For Punkter, der ligge paa Keglefladen

$$xy + yz + xz = 1, \tag{13}$$

ere de to Moduler lige store og lig Afstanden fra O.

8. Den ved $n = 1$ bestemte Plan skjærer den ved $m = 1$ bestemte Cylinder i en Cirkel, der gaar gjennem Punkterne 1, α og β og deles af dem i tre lige store Dele. Denne Cirkel

bestemmer en enkelt uendelig Undergruppe, idet Produktet af to af dens Punkter atter ligger paa Cirklen. Vi ville benytte denne Cirkel til at indføre en Vinkel, der sammen med de to Moduler giver en ny Bestemmelse af Ternionen.

Ligningen for en Plan gjennem Nullinien og Punktet (x, y, z) er

$$(y - z) X + (z - x) Y + (x - y) Z = 0,$$

der, specielt for Planen gjennem Punktet 1, bliver

$$Y - Z = 0.$$

Vinklen v mellem de to Planer bestemmes ved

$$\cos v = \frac{2x - y - z}{2m}, \tag{14}$$

hvor Vinklen regnes ud fra den faste Plan gjennem 1, positiv i Omløbsretningen 1, α, β. Denne Vinkel kalde vi Ternionens Argument.

Vi have nu

$$2x - y - z = 2m \cos v,$$
$$x + y + z = n,$$
$$xy + xz + yz = \frac{n^2 - m^2}{3},$$

hvoraf

$$3x = n + 2m \cos v,$$
$$\left.\begin{matrix} 3y \\ 3z \end{matrix}\right\} = n - m \cos v \pm m \sqrt{3} \sin v,$$

eller

$$\left.\begin{aligned} 3x &= n + 2m \cos v \\ 3y &= n + 2m \cos v' \\ 3z &= n + 2m \cos v'', \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

idet vi have sat

$$v' = v - \frac{2\pi}{3}; \quad v'' = v - \frac{4\pi}{3}. \tag{16}$$

Vi finde nu heraf for Produktet af to Ternioner efter nogle trigonometriske Omforminger, som jeg ikke skal opholde mig ved,

$$\left.\begin{aligned} 3X &= nn_1 + 2mm_1 \cos V \\ 3Y &= nn_1 + 2mm_1 \cos V' \\ 3Z &= nn_1 + 2mm_1 \cos V'', \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

hvor

$$V = v + v_1. \tag{18}$$

Disse Ligninger give et nyt Bevis for vore Sætninger om Modulerne og vise tillige, at

Produktets Argument er Summen af Faktorernes Argumenter.

For Vinklen mellem Linierne fra O til de to Punkter finde vi

$$\cos \Theta = \frac{nn_1 + 2mm_1 \cos(v - v_1)}{\sqrt{n^2 + 2m^2}\sqrt{n_1^2 + 2m_1^2}}. \tag{19}$$

9. Ved Formlerne (15) kunne vi nu skrive Ternionen

$$\frac{n}{3}(1 + \alpha + \beta) + \frac{2m}{3}(\cos v + \alpha \cos v' + \beta \cos v''); \tag{20}$$

da

$$\cos v + \cos v' + \cos v'' = 0, \tag{21}$$

have vi her delt Ternionen i to Dele, af hvilke den ene ligger i Nullinien, den anden i Nulplanen. Er $l + p$ Ternionen under denne Form, faa vi

$$(l + p)(l_1 + p_1) = ll_1 + pp_1, \tag{22}$$

idet $lp_1 = l_1 p = 0$.

10. Af Reglerne for Multiplikation udvikle vi let Reglerne for Division: Man dividerer to Ternioner ved at dividere de til hinanden svarende Moduler og subtrahere Argumenterne. Divisionen er saaledes entydig; den første Modulus bliver ubestemt, hvis de to givne Punkter begge ligge i Nulplanen, den anden, hvis de begge ligge i Nullinien. Udvidelse til Potensopløftning og Roduddragning sker som ved komplexe Tal. Er den første Modulus negativ, kan man ikke uddrage en lige Rod; er den positiv, og er Rodexponenten $2n$, faar Roden $4n$ Værdier.

11. Da man ved Regning med Punkter i Nulplanen ikke kommer ud af denne, have vi her en Undergruppe, som vi særlig ville undersøge. Da den første Modulus altid her er Nul, kunne vi lade den ude af Betragtning, saa at vi ved Modulus mene m. Vi have da, idet $x + y + z = 0$,

$$x + \alpha y + \beta z = \frac{2m}{3}(\cos v + \alpha \cos v' + \beta \cos v''). \tag{23}$$

Vi have her Operationer i Planen, der falde sammen med Opera-

tionerne ved komplexe Tal, men hvor vi regne med treleddede Størrelser; vi faa f. Ex. for $m = 1$

$$\cos nv + \alpha \cos (nv)' + \beta \cos (nv)''$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (\cos v + \alpha \cos v' + \beta \cos v'')^n,$$

svarende til Moivres Formel, o. s. v. Medens vi ved komplexe Tal bestemme et Punkt paa Cirkelperiferien ved dets Projektioner paa to paa hinanden vinkelrette Diametre, projicere vi her paa tre Diametre, der dele Cirklen i lige store Dele; man ser let, at Summen af de tre Projektioner altid er Nul. Man kan forresten udvide dette til et vilkaarligt Antal Led, idet man benytter flere Diametre med lige store indbyrdes Vinkler. De Relationer, der da blive mellem de forskjellige *coss.*, kunne findes paa følgende Maade:

Sætte vi

$$x^n - (\cos v + i \sin v) = 0,$$

og ombytte vi x med $\frac{1}{x}$, faa vi

$$x^n - (\cos v - i \sin v) = 0.$$

De to Ligninger trækkes sammen i den ene

$$x^{2n} - 2x^n \cos v + 1 = 0,$$

der er en reciprok Ligning, som skrives

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2 \cos v = 0.$$

Sætte vi her $x + \frac{1}{x} = y$, have vi

$$y = 2 \cos \frac{v + 2p\pi}{n},$$

der har n Værdier, som bestemmes ved (Forf.'s Ligning. Th. 45)

$$y^n - ny^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} y^{n-6} \ldots - 2 \cos v = 0.$$

Er n ulige, bliver $-2 \cos v$ det sidste Led; er n lige bliver det $(-1)^{\frac{n}{2}}.2 - 2 \cos v$.

Værdierne af $\frac{y}{2}$ ere netop Projektionerne af en Radius paa

de n omtalte Diametre. Den fundne Ligning viser os, at alle symmetriske Funktioner af disse Stykker af lavere end n'te Grad ere uafhængige af den givne Radies Stilling. Bestemmer man et Punkt paa Periferien ved et Udtryk af Formen

$$\cos v + \alpha \cos v' + \beta \cos v'' + \gamma \cos v''' + \ldots,$$

hvor Vinklerne ere Radiens Vinkler med Diametrene, og hvor man regner med α, β, γ ... som med Enhedens Rødder, bliver der ingen væsentlig Forskjel paa Regning med disse Udtryk og med komplexe Tal.

12. Ved Ternionligninger er at mærke, at Sætningen om Røddernes Antal ikke gjælder. Idet vi tænke os alle Ternioner opløste efter (20), deler Ligningen sig i to andre, af hvilke den ene tjener til at bestemme n, medens den anden tjener til at bestemme den Del af den ubekjendte, der ligger i Nulplanen. Den sidste er, som vi have set, ikke væsentlig forskjellig fra en sædvanlig Ligning; er den af n'te Grad, har den n Rødder af Formen

$$x + \alpha y + \beta z,$$

hvor

$$x + y + z = 0;$$

den første har højst n Rødder, da vi kun kunne bruge reelle Tal som Værdier af n. Ternionligningen af n'te Grad har saaledes højst n^2 Rødder.

III. Kvaternioner.

1. Efter i det foregaaende at have behandlet dobbelt og tredobbelt uendelige Systemer, skal jeg nu gaa over til at behandle et firdobbelt uendeligt System; jeg vil hertil vælge Hamilton's Kvaternioner, i det Haab, at en let overskuelig Fremstilling af Kvaterniontheoriens Grundtræk ikke vil være Læseren uvelkommen. Jeg skal her begynde med den rent formelle algebraiske Udvikling og derpaa gaa over til den udviklede Algebras Anvendelse paa en existerende firdobbelt uendelig Gruppe af Individer.

2. Ved en Kvaternion forstaas et Udtryk af Formen

$$a + bi + cj + dk,$$

hvor i, j og k ere Symboler, der ikke kunne trækkes sammen

ved Addition, medens a, b, c og d ere reelle Tal. a kaldes **Skalaren**, $bi + cj + dk$ **Vektoren**.

$$t = + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \qquad (1)$$

kaldes **Tensoren**; sætte vi denne Størrelse uden for en Parenthes, kaldes den i Parenthesen staaende Kvaternion **Versoren**; en Versor er altsaa en Kvaternion, hvis Tensor er 1. Er Kvaternionen q, betegne

$$Sq, \; Vq, \; Tq \text{ og } Uq$$

henholdsvis Kvaternionens Skalar, Vektor, Tensor og Versor.

At to Kvaternioner ere lige store, vil sige, at Koefficienterne parvis ere lige store.

3. Addition og Subtraktion udføres Led for Led, som ved komplexe Tal eller Ternioner; det er klart, at disse Operationer ere entydige, og at de sædvanlige Sætninger gjælde.

Ved Produktet af to Kvaternioner forstaa vi den Kvaternion, der er dannet af de givne efter de sædvanlige Multiplikationsregler, dog saaledes, at Faktorernes Orden ikke tør forandres, og idet vi sætte

$$\left.\begin{array}{r} i^2 = j^2 = k^2 = -1; \\ ij = k; \; jk = i; \; ki = j; \\ ji = -k; \; kj = -i; \; ik = -j. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Man efterviser nu let, hvad jeg ikke skal opholde mig ved, at et Produkt, der er dannet af lutter Faktorer i, j og k, ved Anvendelse af de givne Regler for disses Multiplikation, kun kan føre til ét Resultat, hvorledes man end sætter eller hæver Parentheser, naar man blot fastholder Ordnen af Faktorerne; saaledes er f. Ex.

$$ijjk = i(jj)k = (ij)(jk) = -j.$$

Heraf følger, idet de reelle Faktorer kunne sættes paa en hvilken som helst Plads i Produktet, at man **i et Produkt af hvilke som helst Kvaternioner kan hæve eller sætte Parentheser efter Behag, naar blot Kvaternionernes Orden ikke forandres.**

4. Vi kunne bringe en Kvaternion paa Formen

$$q = t\,[\cos\alpha + (xi + yj + zk)\sin\alpha] \qquad (3)$$

$$= t\,[\cos\alpha + v\sin\alpha], \qquad (4)$$

hvor t er Tensoren og

$$v = xi + yj + zk,$$

kaldes en Enhedsvektor; for denne er $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. α faar to Værdier med modsatte Tegn og v samtidig to Værdier med tilsvarende modsatte Tegn. Udførelse af Regningen viser, at Kvadratet af enhver Enhedsvektor er -1.

Ved den konjugerede til q eller Kq forstaa vi

$$t\,(\cos\alpha - v\sin\alpha);\text{ nu er}$$

$$q\,.\,Kq = t^2\,(\cos\alpha + v\sin\alpha)\,(\cos\alpha - v\sin\alpha) = t^2. \tag{5}$$

I det hele taget ser man let, at af $v^2 = -1$ følger, at man regner med Kvaternioner, der have samme Enhedsvektor, som med komplexe Tal.

5. Ved Udførelse af Multiplikationen faar man

$$(a + bi + cj + dk)(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = A + Bi + Cj + Dk,$$

hvor

$$\left.\begin{aligned} A &= aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1,\\ B &= ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1,\\ C &= ac_1 - bd_1 + ca_1 + db_1,\\ D &= ad_1 + bc_1 - cb_1 + da_1;\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nu er, som bekjendt (Sætning af Euler)

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2, \tag{7}$$

der viser, at Produktets Tensor er Produktet af Faktorernes; det samme maa da gjælde om Versorerne. Tillige ses, at Skalaren til Produktet er uafhængig af Faktorernes Orden; dette gjælder imidlertid kun for to Faktorer; for flere Faktorer bliver Produktets Skalar kun uforandret ved Kredsforskydning af Faktorerne.

6. Da Faktorernes Orden ikke er vilkaarlig, maa der blive to Slags Division. Vi ville her holde os til den ene, idet vi skrive Ligningen

$$r = pq \tag{8}$$

som

$$\frac{r}{q} = p \text{ eller } rq^{-1} = p. \tag{9}$$

Da nu af $r = pq$ følger $rs = pqs$ eller

$$\frac{rs}{qs} = p = \frac{r}{q} \qquad (10)$$

ser man, at i en Brøk kunne Tæller og Nævner multipliceres med samme Faktor længst til Højre.

Af $\qquad \beta = q_1 \alpha; \; \gamma = q_2 \alpha$

følger $\qquad \beta + \gamma = (q_1 + q_2)\,\alpha,$

saa at $\qquad \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\beta + \gamma}{\alpha}. \qquad (11)$

Brøker kunne saaledes adderes, naar de have samme Nævner, men da Brøker med forskjellige Nævnere ikke i Reglen kunne gjøres ensbenævnte, anvendes Brøker ikke meget. De kunne erstattes ved hele Former, idet Tæller og Nævner multipliceres med Nævnerens konjugerede.

7. Vi saa ovenfor, at, for Kvaternioner med samme Enhedsvektor, gjælde de samme Regler som for komplexe Tal. Deraf følger, at Potensopløftning og Roduddragning kan udføres efter Moivre's Formel. Derimod gjælder Binomialformlen ikke, idet f. Ex.

$$(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2,$$

hvor de to mellemste Led ikke kunne trækkes sammen.

Kvaternionligninger kunne differentieres, idet vi kunne give Kvaternionerne uendelig smaa Tilvæxter, det vil sige saadanne Tilvæxter, som ere Kvaternioner med uendelig smaa Koefficienter; man har da f. Ex.

$$d \,.\, q^2 = (q + d \,.\, q)^2 - q^2 = q \,.\, dq + dq \,.\, q, \text{ o. a. l.}$$

8. Da Anvendelsen af Kvaternioner især beror paa Udtrykkenes Omforming, skal jeg give nogle Exempler paa saadanne. Rigtigheden kan let eftervises ved direkte Udregning. I disse Formler betyde α, β, γ, δ Vektorer.

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2\,S\alpha\beta; \; \alpha\beta - \beta\alpha = 2\,V\alpha\beta.$$

$$\alpha\beta = K\beta\alpha; \; V\alpha\,V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha.$$

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta.$$

$$\delta S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\delta + \beta S\gamma\alpha\delta + \gamma S\alpha\beta\delta.$$

$$\delta S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta.$$

9. For at anvende den udviklede Algebra vælge vi et retvinklet Koordinatsystem og betegne tre Punkter i Axerne, i Af-

standen 1 fra Begyndelsespunktet O, ved i, j og k. Et Punkt A med Koordinaterne x, y og z eller Linien OA i Størrelse og Retning betegnes ved

$$xi + yj + zk,$$

der er Udtrykket for en Vektor. Addition af Vektorer kommer derved til at svare til deres Sammensætning som Kræfter.

Vi ville nu søge Betydningen af Multiplikation og betragte først Ligningen

$$(\cos\omega + k\sin\omega)(i\cos v + j\sin v) = i\cos(\omega + v) + j\sin(\omega + v).$$

Multiplikanden (som jeg her med Hamilton sætter til højre) er her en hvilken som helst Vektor i xy-Pl. Multiplikator er en Kvaternion, hvis Enhedsvektor er vinkelret paa xy-Pl.; Resultatet viser, at Multiplikationen drejer enhver Vektor i xy-Pl. en Vinkel, der netop er Kvaternionens Vinkel. Punktet k, der ligger i en Kugle om O med Radius 1, ville vi kalde Polen for Drejningen. De positive Drejninger tænkes, sete fra Polen, at dreje modsat Urviseren.

Til lignende Resultater komme vi, naar vi tage i eller j til Pol og dreje henholdsvis i yz- eller xz-Pl.

10. Vi kunne nu vise, at de Regler, som vi have opstillet for Regning med i, j og k, ogsaa gjælde for hvilke som helst tre, paa hinanden vinkelrette, Enhedsvektorer. Ere disse

$$\left.\begin{aligned} i' &= x_1 i + y_1 j + z_1 k, \\ j' &= x_2 i + y_2 j + z_2 k, \\ k' &= x_3 i + y_3 j + z_3 k, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

have vi først, som tidligere vist, at de alle til Kvadrat have — 1. Endvidere er

$$i'j' = -x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)k + \text{o. s. v.},$$

men, naar Vektorerne ere vinkelrette paa hinanden, har man

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$
$$x_1y_2 - y_1x_2 = z_3 \text{ o. s. v.},$$

hvoraf

$$i'j' = k'$$

og analogt for de andre Produkter. Da nu Udledelsen af Multiplikationens Betydning ovenfor kun støttede sig paa Formlerne for Regning med i, j og k, har man i Almindelighed:

Dersom en Vektor multipliceres (foran) med en Kva-

ternion, hvis Tensor er 1, og hvis Vektor er vinkelret paa den første, drejes den en Vinkel, lig Kvaternionens Vinkel.

Vi have her sat en Vektor i Stedet for en Enhedsvektor, hvad man let ser er tilladeligt. Ligeledes ser man let, at dersom Kvaternionens Tensor er t, blive de drejede Vektorer samtidig multiplicerede med t.

Kvaternionen drejer og multiplicerer saaledes i en Plan (Kvaternionens Plan), vinkelret paa dens Vektor eller Axe. Da det ved Drejningerne kun er Retningen og ikke den absolute Beliggenhed, det kommer an paa, gjøre vi ingen Forskjel paa parallele Planer eller Linier.

For $\alpha = 0$ bliver Kvaternionen t, der saaledes angiver Multiplikation uden Drejning; for $\alpha = \pi$ bliver den $-t$; for $\alpha = \frac{\pi}{2}$ antager Kvaternionen Formen

$$t\,(xi + yj + zk),$$

saa at en Enhedsvektor som Multiplikator drejer 90°.

11. Vi maa vel lægge Mærke til, at Kvaternionen kun drejer Vektorer, der ere vinkelrette paa Kvaternionens Axe. For en anden Vektor bliver Produktet ikke en Vektor, idet Skalaren ikke bliver Nul. Multiplikationen er i dette Tilfælde indbefattet i den almindelige Multiplikation af to Kvaternioner, hvis Betydning vi nu skulle undersøge.

Lad q_1 og q_2 være to vilkaarlige Kvaternioner og v være en saadan Vektor, som af q_2 drejes hen paa Skjæringslinien af de to Planer, i hvilke q_1 og q_2 operere. Man faar da

$$q_1 q_2 v = v_1,$$

hvor v_1 er en Vektor i q_2's Plan. $q_1 q_2$ maa derfor være den Kvaternion, som drejer v hen paa v_1 (Ordet dreje er her taget som indbefattende Multiplikation med Tensoren). Herved er Betydningen af Kvaternioners Multiplikation bestemt som en Slags Sammensætning af Drejninger. Man maa imidlertid ikke forvexle denne Sammensætning med, hvad man i Almindelighed forstaar ved Sammensætning af Drejninger. Vi ville lidt nærmere betragte de

to Slags Sammensætninger, idet vi tænke os Tensorer og Vektorer lig 1, saa at Drejningerne kunne repræsenteres ved Buer paa Enhedskuglen.

Lad ABC være en sphærisk Trekant, hvor Siderne have Polerne C_1, A_1 og B_1. En Drejning, der fører A til B, sker ved en Kvaternion q_1, hvis Vinkel er $AB = c$, og hvis Pol er C_1. En anden Kvaternion q_2, hvis Vinkel er $BC = a$, og hvis Pol er A_1, fører B til C. Kvaternionen $q_2 q_1$ er da den, der fører A til C; den har derfor Vinklen $AB = C$ og Polen B_1. Skalaren i Produktet er altsaa $cos\ b$; ved Udførelse af Multiplikationen finder man for Skalaren

$$cos\ a\ cos\ c + sin\ a\ sin\ c\ cos\ B,$$

stemmende med en bekjendt sphærisk Relation.

12. Gaa vi over til, hvad man i Almindelighed forstaar ved Drejninger, kunne vi tænke os, at vi ved to sukcessive Drejninger af Kuglen om OC_1 og OA_1, bringe A, ligesom før, til at gjennemløbe Buerne AB og BC. Ved den resulterende Drejning forstaa vi da den, der ikke alene bringer A til C, men samtidig bringer alle Kuglens Punkter paa deres Plads. Skal dette ske, maa A i Almindelighed følge en Lillecirkel til C, saa at den resulterende Drejning ikke faar OB_1 til Axe.

Man kan for Resten ogsaa sammensætte virkelige Drejninger ved Hjælp af Kvaternioner. Danner man nemlig

$$q v q^{-1} = v_1,$$

hvor v er en vilkaarlig Vektor, q en vilkaarlig Kvaternion, vil v_1 blive en Vektor og netop den, som v bliver til ved at drejes om Kvaternionens Pol det dobbelte af Kvaternionens Vinkel. Sammensætning af virkelige Drejninger kan derfor ogsaa udføres ved Multiplikation af Kvaternioner, kun at disses Vinkler da maa være de halve Drejningsvinkler. Beviset for den anførte Sætning overlades til Læseren.

13. Betydningen af to Kvaternioners Addition ses let af Ligningen

$$(q_1 + q_2) v = q_1 v + q_2 v,$$

hvor q_1 og q_2 ere to vilkaarlige Kvaternioner og v er en Vektor

i Skjæringslinien af de to Kvaternioners Planer. $q_1 a$ og $q_2 a$ ere da to Vektorer; kalde vi disses Sum v_1, have vi da

$$(q_1 + q_2)\, v = v_1,$$

saa at $q_1 + q_2$ er den Kvaternion, der drejer v hen paa v_1.

14. Anvendelsen af Kvaternioner beror væsentlig paa Omforminger og Udtrykkenes geometriske Fortolkning. Jeg skal her anføre nogle Sætninger, som derved hyppig anvendes. $\alpha, \beta \ldots$ ere Vektorer.

$$S\alpha\beta = ab \cos\theta,$$

hvor θ er Vinklen mellem α og β, a og b deres Længder (Tensorer). At Sætningen er rigtig for Længdernes Vedkommende, ser man strax, og ere α og β Enhedsvektorer, har man

$$S\alpha\beta = -S\frac{\alpha\beta}{-1} = -S\frac{\alpha\beta}{\beta^2} = -S\frac{\alpha}{\beta} = -\cos\theta,$$

idet Brøken betegner den Kvaternion, som drejer β til α. Tage vi i Stedet for S overalt TV, faa vi paa samme Maade

$$TV\frac{\alpha}{\beta} = \sin(\alpha\beta),$$

altsaa: Tensor til Vektor til et Produkt af to Vektorer er det dobbelte Areal af den Trekant, hvis to Sider ere Vektorerne.

Ere saaledes α, β og γ Vektorer, parallele og lige store med Siderne af en Trekant, har man

$$\alpha = \beta + \gamma$$

og deraf $$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\beta,$$

men $$\beta\gamma + \gamma\beta = 2S\beta\gamma = -2bc\cos A;$$

$$\alpha^2 = -a^2;\ \beta^2 = -b^2;\ \gamma^2 = -c^2,$$

saa at Ligningen giver den bekjendte Relation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Ligningen $$S\alpha\beta = 0$$

udtrykker, at Produktet af de to Vektorer er en Vektor, altsaa at α og β ere vinkelrette paa hinanden.

Idet identisk

$$\alpha\beta\gamma = (S\alpha\beta)\,\gamma + (V\alpha\beta)\,\gamma,$$

faas, da den første Del i Parenthesen er en Vektor,

$$S\alpha\beta\gamma = S(V\alpha\beta)\,\gamma = S(T\alpha\, T\beta\, \eta \sin\theta)\,\gamma,$$

hvor η er Enhedsvektoren vinkelret paa Planen $\alpha\beta$. Altsaa

$$S\alpha\beta\gamma = T\alpha\, T\beta \sin\theta\, S\eta\gamma = T\alpha\, T\beta\, T\gamma \sin\theta \sin\varphi,$$

hvor φ er γ's Vinkel med Planen $\alpha\beta$. Man ser heraf, at Skalaren til et Produkt af tre Vektorer er Volumen til det af de tre Vektorer som Kanter bestemte Parallelepipedum. Deraf følger atter, at

$$S\alpha\beta\gamma = 0$$

er Betingelsen for, at de tre Vektorer ligge i samme Plan.

Man ser let, at 0, α, $\alpha + \beta$, β bestemme Vinkelspidserne af et Parallelogram med Diagonalerne $\alpha - \beta$ og $\alpha + \beta$. Nu er

$$S(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = S(\alpha^2 + \beta\alpha - \alpha\beta - \beta^2) = \alpha^2 - \beta^2,$$

idet $\beta\alpha - \alpha\beta$ er en Vektor. For $\alpha^2 = \beta^2$ eller $T\alpha = T\beta$ er Parallelogrammet en Rhombe og

$$S(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0$$

viser, at Diagonalerne ere vinkelrette paa hinanden.

Ligningen

$$\varrho = \alpha + x(\beta - \alpha),$$

hvor α og β ere givne, medens x er et ubestemt Tal, er Ligning for den rette Linie gjennem α og β; den kan ogsaa skrives

$$\varrho = \frac{\mu\alpha - \beta}{\mu - 1},$$

og μ er da Forholdet, i hvilket Punktet ϱ deler Afstanden mellem α og β. Ere f. Ex. α, β, γ, δ Vinkelspidser af en vindskjæv Firkant, viser Symmetrien af Udtrykket

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4},$$

at de tre Linier, der forbinde modstaaende Siders Midtpunkter og Diagonalernes Midtpunkter, skjære hverandre i deres fælles Midtpunkt.

For Planen gjennem α, β og γ faar man paa lignende Maade Ligningen

$$\varrho = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c}.$$

Ligningen for en Linie gjennem β og vinkelret paa α er

$$\varrho = \beta + x\gamma,$$

hvor γ skal bestemmes ved

$$S\alpha\gamma = 0 \text{ og } S\alpha\beta\gamma = 0,$$

af hvilke den første udtrykker, at α er vinkelret paa γ, den sidste, at α, β og γ ligge i samme Plan; de to Ligninger tilfredsstilles af

$$\gamma = \alpha^{-1} V\alpha\beta,$$

idet

$$S\alpha\alpha^{-1} V\alpha\beta = SV\alpha\beta = 0,$$

og man kan sætte

$$\beta = \alpha^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}S\alpha\beta + \alpha^{-1} V\alpha\beta,$$

der viser, at γ ligger i Planen $\alpha\beta$, idet β og $\alpha^{-1}S\alpha\beta$ ligge i den.

15. Jeg skal nu ikke give flere geometriske Anvendelser; den, der ønsker flere, vil finde nok af dem hos Hamilton eller Tait. Jeg kunde fristes til at sige for mange, thi man faar Indtrykket af, at mange af Anvendelserne ere unaturlige, og at Resultatet kun er naaet, fordi det ad anden Vej var kjendt i Forvejen. Jeg har imidlertid selv saa ringe Øvelse i at bruge Kvaternioner, at jeg ikke selv kan betragte min Dom om dem som paalidelig. Ved nogle Undersøgelser i Mekaniken føre de til elegante Udviklinger. Saaledes blive

$$\frac{d\varrho}{dt} \text{ og } \frac{d^2\varrho}{dt^2}$$

Udtrykkene for Hastighed og Akceleration i Størrelse og Retning, idet ϱ er Banens Vektor. Man faar saaledes for Centralbevægelsen

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = PU\varrho,$$

hvor P er en reel Størrelse, der bestemmer Tiltrækningen; man faar heraf

$$\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dt^2} = S,$$

hvor S er en Skalar. Heraf følger atter

$$V\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0,$$

der, ved Prøve, let ses at være integreret ved

$$V\varrho\,\frac{d\varrho}{dt} = \gamma,$$

hvor γ er en konstant Vektor. Herved udtrykkes Fladeprincipet, idet $V\varrho d\varrho$ er det dobbelte Areal af den Trekant, hvis to Sider ere ϱ og $d\varrho$.

ELEMENTARE BEWEISE DER SÄTZE VON BRIANCHON UND PASCAL[1]).

(VON KARL HAASE IN AUGSBURG).

I. Beweise für den Satz von Brianchon.

1) Für die Hyperbel. Gegeben eine Tangente mit dem Berührungspunkt A. Die Tangente werde von A aus nach rechts — der Beschauer befinde sich im nächsten Brennpunkt — bis zum Schnitt A' mit der nächsten Asymptote verlängert. Eine zweite Tangente mit dem Berührungspunkt B werde nach links bis zum Asymptotenschnitt in B' gezogen, dann ist bekanntlich $A'B'$ zu AB parallel. Beide Gerade, die Hauptgerade AB und ihre Parallele sollen zusammen ein Streifen heissen.

Durch einen beliebigen Punkt P in der Curvenebene ziehen wir irgend eine Gerade, welche AB in Q, $A'B'$ in Q' schneiden möge. Im Folgenden soll $PQ : PQ'$ der Quotient des Punktes P in Bezug auf den Streifen $(AB, A'B')$ genannt werden. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher in Bezug auf zwei gegebene Streifen gleichen Quotienten besitzt, ist diejenige Gerade, welche den Schnittpunkt der beiden Hauptgeraden mit dem Schnittpunkt ihrer Parallelen verbindet. Diese Gerade heisse die Chordale beider Streifen. Betreffs dieser gilt der Hilfsatz:

»Die Chordalen dreier Streifen schneiden sich stets in einem Punkt«.

Es kann nun der Satz von Brianchon in sehr einfacher Weise bewiesen werden.

Von den sechs Tangenten in $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ behandeln wir die Tangenten in $A_1 B_1 C_1$ als »rechte«, d. h. wir ziehen von ihren Berührungspunkten aus die rechten Teile derselben bis zum Asymptotenschnitt, die drei andern Tangenten in $A_2 B_2 C_2$ dagegen betrachten wir als »linke« Tangenten.

[1]) Som enkelte Gange tidligere have vi her undtagelsesvis optaget en i et ikke nordisk Sprog affattet interessant Artikel, som staar i nær Forbindelse med Æmner, der tidligere ere behandlede i Tidsskriftet. — Red.

Den durch die Tangenten $A_1 A_2$ bestimmten Streifen bezeichnen wir mit α, ebenso mit β und γ die durch die Tangenten $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ bestimmten Streifen.

Der Schnittpunkt der Tangenten $A_1 B_2$ hat in Bezug auf den Streifen $A_1 B_2$ denselben Quotienten in der Richtung der Tangenten A_1, wie in Richtung der Tangenten B_2. Aber die auf A_1 markierten Punkte gehören zugleich dem Streifen α, die auf B_2 ebenso dem Streifen β an, daher hat der Punkt $A_1 B_2$ gleichen Quotienten in Bezug auf die Streifen α und β; ebenso hat auch der Punkt $A_2 B_1$ den gleichen Quotienten in Bezug auf die Streifen α und β, daher ist die Verbindungsgerade der Punkte $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ die Chordale der Streifen α und β. In ähnlicher Weise ist die Verbindungsgerade der Punkte $B_1 C_2$ und $B_2 C_1$ die Chordale der Streifen β und γ und endlich ist die dritte Diagonale des Brianchon'schen Sechsseits die Chordale der Streifen γ und α. Da sich aber die Chordalen dreier Streifen stets in einem Punkt schneiden, so ist der Satz von Brianchon für die Hyperbel bewiesen[1]).

2) Für Hyperbel und Ellipse. Von den Brennpunkten F und H werden nach einer Tangenten gerade Linien nach rechts gezogen und zwar bilde der von F ausgehende Strahl mit der Tangente den Winkel δ, der von H ausgehende mit der Tangente den Winkel ε. Nach einer zweiten Tangenten werden Strahlen aus F und H gezogen, dieses Mal aber nach links, ferner soll jetzt der aus F gezogene Strahl unter dem Winkel ε, der aus H gezogene unter dem Winkel δ gegen diese zweite Tangente geneigt sein.

Es besteht nun der Satz, dass die 4 auf den beiden Tangenten markierten Punkte stets auf einem und demselben Kreise liegen.

Zum Beweise beachte man, dass die von F auslaufenden Geraden mit den Tangenten ein Viereck bestimmen, welches ähn-

[1]) Dieser Beweis lässt sofort eine Erweiterung auf jeden Kegelschnitt zu, wenn man das Asymptotenpaar durch eine zur gegebenen Curve ähnliche und coaxiale ersetzt.

lich ist demjenigen, welches die aus H auslaufenden Geraden mit denselben Tangenten bilden.

Der Beweis des Satzes von Brianchon verläuft jetzt ganz analog dem unter (1) gegebenen. Von den sechs Tangenten $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ betrachten wir $A_1 B_1 C_1$ als rechte, $A_2 B_2 C_2$ als linke Tangenten. Die Punkte auf $A_1 A_2$ bestimmen den Kreis α, ebenso die auf $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ gegebenen die Kreise β und γ. Die Punkte $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ haben beide gleiche Potenz in Bezug auf α und β. Ihre Verbindungsgerade ist daher die Chordale dieser Kreise. Die Gerade, welche $B_1 C_2$ mit $B_2 C_1$ verbindet, ist Chordale von β und γ und endlich geht die Chordale von γ und α durch die Punkte $C_1 A_2$ und $C_2 A_1$. Die 3 Diagonalen des Brianchon'schen Sechsseits müssen sich daher als die Chordalen der 3 Kreise α, β, γ in einem Punkt schneiden.

3) Für alle 3 Kegelschnitte. Wir verbinden die Curvenpunkte $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ mit einem Brennpunkte F und tragen in diesem an den Geraden FA_1, FB_1, FC_1 den beliebigen[1]) Winkel φ nach rechts ab[2]), an den Geraden FA_2, FB_2, FC_2 dagegen den Winkel φ nach links hin. Auf allen den sechs neugewonnenen Winkelschenkeln schneiden wir sodann vom Brennpunkt F aus die gleiche Strecke l ab, wodurch wir zu den Punkten $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$ gelangen. Endlich werden um diese Punkte congruente Kreise mit beliebigem Radius ϱ beschrieben.

Durch den um a_1 beschriebenen Kreis und die Tangente in A_1 als Chordale ist ein Kreisbüschel bestimmt, ebenso durch den Kreis um a_2 und die Tangente A_2. Beide Kreisbüchel haben, weil die Punkte a_1 und a_2 von A_0, dem Schnittpunkte der Tangenten A_1 und A_2 gleichweit entfernt sind, einen Kreis α gemein-

[1]) Null darf φ übrigens nie werden, da sonst die 3 weiter unten zu erwähnenden Kreise α, β, γ in einen einzigen zusammenfallen.

[2]) Jedem Punkt der Curve entspricht ein Halbstrahl aus F. Fängt man (bei der Hyperbel) mit dem, F am nächsten liegenden Scheitel an und geht stetig weiter, so erkennt man, dass man als Halbstrahlen für Punkte des zweiten Astes der Hyperbel diejenigen zu nehmen hat, welche die Curve selbst nicht schneiden. In der Richtung dieser Halbstrahlen muss man sehen, wenn man φ nach rechts oder links abträgt.

schaftlich. In gleicher Weise haben die Kreisbüschel $(b_1 B_1)$ und $(b_2 B_2)$ einen Kreis β, und endlich die Büchel $(c_1 C_1)$ und $(c_2 C_2)$ einen Kreis γ gemeinschaftlich.

Der Schittpunkt M der Tangenten A_1 und B_2 hat in Bezug auf den Kreis α die Potenz $\overline{Ma_1}^2 - \varrho^2$ und in Bezug auf β $\overline{Mb_2}^2 - \varrho^2$. Da nun $Ma_1 = Mb_2$, so liegt M auf der Chordale der Kreise α und β; Gleiches gilt von dem Schnittpunkte N der Tangenten A_2 und B_1, indem $\overline{Na_2}^2 - \varrho^2 = \overline{Nb_1}^2 - \varrho^2$ u. s. w.

Anmerkung: Die Beweise (2) und (3) sind Erweiterungen des von Bing[1]) für den Kreis gegebenen Beweises.

Im Folgenden ist angenommen, dass ϱ so gross ist, dass sämmtliche um $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2$ beschriebene Kreise die zugehörigen Tangenten $A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2$ in reellen Punkten schneiden.

II. Beweise für Pascals Satz.

4) Für die Hyperbel. Wir construiren zunächst wieder die Streifen α, β, γ, wobei wir α als zur Sehne $A_1 A_2$ gehörig, ebenso β und γ als zu den Sehnen $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ gehörig betrachten wollen.

Der Schnittpunkt der Tangenten $A_1 A_2$ oder der Punkt A_0 hat gleichen Quotienten sowohl in Bezug auf alle Streifen, deren Hauptgeraden durch den Punkt A_1 gehen, als auch in Bezug auf alle Streifen, deren Hauptgeraden durch A_2 gehen. Alle diese Streifen gehören einem Streifenbündel[2]) an, dessen Centrum A_0 ist. Zu diesem Streifenbündel gehören insbesondere auch die Streifen der Sehnen $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$. In gleicher Weise hat B_0

---

[1]) Man sehe H. G. Zeuthen, Grundriss einer elementargeometrischen Kegelschnittslehre. Leipzig, Teubner 1882. Seite 72.

[2]) Ein Streifenbüschel wird gebildet von allen Streifen, deren Hauptgeraden durch einen festen Punkt S gehen, während ihre Parallelen durch einen zweiten festen Punkt S' gehen. Ein Streifenbündel mit dem Centrum P besteht aus all' den Streifen, für welche der Quotient in P denselben Wert besitzt.

Diese Begriffe sind analog den Begriffen Kreisbüschel und Kreisbündel gebildet. Man sehe hierüber: Reye, synthetische Geometrie der Kugeln, Leipzig, Teubner 1879.

d. i. der Schnittpunkt der Tangenten $B_1 B_2$ gleichen Quotienten in Bezug auf die Streifen $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$. Es hat also der Punkt A_0 sowohl wie der Punkt B_0 gleichen Quotienten in Bezug auf die Streifen $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$, daher ist $A_0 B_0$ die Chordale dieser Streifen, und weil auf der Chordalen zweier Streifen sich deren Hauptgeraden schneiden müssen, so gehen die Geraden $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ durch denselben Punkt der Geraden $A_0 B_0$. Bezeichnet man den Schnitt der Tangenten in C_1 und C_2 mit C_0, dann kann ebenso gezeigt werden, dass sich $B_1 C_2$ und $B_2 C_1$ auf $B_0 C_0$ und $C_1 A_2$, $C_2 A_1$ auf $C_0 A_0$ schneiden.

In dem Streifenbüschel $A_0 B_0$ construiren wir uns nun einen Streifen, dessen Hauptgerade G den Punkt $(A_1 B_2, A_2 B_1)$ mit $(B_1 C_2, B_2 C_1)$ verbindet, und mit der nämlichen Hauptgeraden G construieren wir uns einen Streifen in dem Büschel $B_0 C_0$. Da beide Streifen in dem Bündel B_0 liegen und dieselbe Hauptgerade besitzen, so sind sie identisch.

Der eben construierte Streifen liegt also in dem Büschel $A_0 B_0$, also in den Bündeln A_0 und B_0, er liegt ferner in dem Büschel $B_0 C_0$, also in den Bündeln B_0 und C_0; er liegt demnach auch zugleich in den Bündeln A_0 und C_0, also in dem Büschel $A_0 C_0$. Alle Hauptgeraden dieses Büschels gehen durch den Schnittpunkt von $A_0 C_0$ mit G; in diesem Punkt schneiden sich folglich $A_1 C_2$ und $A_2 C_1$.

5) Für Hyperbel und Ellipse. Der eben gegebene Beweis des Pascal'schen Satzes lässt sich sofort in einen andern verwandeln, welcher statt der in (1) benützten Streifen die in (2) gefundenen Kreise α, β, γ verwendet. Man hat einfach überall Kreis statt Streifen, Potenz statt Quotient, Chordale in Bezug auf den Spurkreis statt Hauptgerade zu lesen, vorher aber sich über folgende Sätze Klarheit zu verschaffen:

Sämmtliche in (2) gefundenen Tangentenpunkte, deren dort gezogene Fahrstrahlen mit der Tangente den Winkel δ einschliessen, liegen auf einem die Curve doppelt berührenden Kreise δ, dessen Mittelpunkt in der Nebenachse liegt. Ebenso gibt es einen Kreis ε, auf welchem die übrigen in (2) erwähnten Tangentenpunkte liegen.

Der die 4 Berührungspunkte dieser beiden Kreise verbindende neue Kreis soll der Spurkreis heissen.

Die Chordale für den Spurkreis und einen beliebigen der Kreise α, β, γ, welche durch die 4 Punkte eines Tangentenpaares gehen, ist die Berührungssehne dieses Tangentenpaares.

Die beiden eben angeführten Hilfssätze lassen sich elementar beweisen[1]), doch ist der Beweis des letzten Hilfssatzes nicht besonders einfach, weshalb auf dessen Wiedergabe hier verzichtet wird.

6) Für alle 3 Kegelschnitte. Will man mit Hilfe der in (3) benützten Kreise α, β, γ den Pascal'schen Satz beweisen, so lässt sich, unter der Voraussetzung, dass $\varphi = 90^0$ ist, der hier allein nothwendige letzte Hilfssatz sofort beweisen. Betrachten wir nämlich den mit dem Radius $\sqrt{\varrho^2 - l^2}$ um F beschriebenen Kreis als Spurkreis, so hat in Bezug auf ihn der von F um die Strecke f entfernte Punkt A_1 der Curve die Potenz $f^2 - (\sqrt{\varrho^2 - l^2})^2$, während der nämliche Curvenpunkt in Bezug auf den Kreis α die Potenz hat $(\sqrt{f^2 + l^2})^2 - \varrho^2$. Da beide Potenzen einander gleich sind, so ist der Satz bewiesen.

Der weitere Gang des Beweises ist der oben angegebene.

Schlussbemerkung. Die früher von mir mit Hilfe der Vektoren-Kreise (Blätter für das bayrische Realschulwesen 1883) gegebenen Beweise der Sätze von Pascal und Brianchon, ebenso wie die vorstehend gegebenen, können als verschiedene Übertragungen höchst einfacher Beweise der erwähnten Sätze (für die ebenen Curven auf windschiefen Flächen zweiter Ordnung) angesehen werden.

Zu diesen Beweisen gelangt man von den früher gegebenen Beweisen aus[2]), wenn man jeden Vektorenkreis nach dem Vorgang

---

[1]) Der Beweis des ersten Satzes findet sich: Zeuthen *a. a.* O Seite 18.

[2]) Der Beweis des Pascal'schen Satzes unter Anwendung der Vektorenkreise d. h. solcher Kreise, welche die vier Radien-Vektoren zweier Curvenpunkte berühren, ist auch in diese Zeitschrift übergegangen (Jahrgang 1883, S. 78, wobei Herr Zeuthen auch bereits hingewiesen hat auf die Verwendbarkeit der Cyklographie von Fiedler.

von Fiedler[1]) durch einen Raumpunkt ersetzt, dessen Projektion auf die Curvenebene im Kreismittelpunkt liegt, während seine Entfernung von der Curvenebene dem Radius des Vektorenkreises proportional ist.

Von den, mit Hilfe der Streifen gegebenen Beweisen gelangt man zu den entsprechenden für die Curven windschiefer Flächen, wenn man die Asymptoten (sammt allen in ihnen gelegenen Tangentenpunkten) als Projektionen zweier Raumgeraden J, K ansieht, welche in einer, zur Curvenebene parallelen Ebene liegen. Jede Tangente T erscheint so als Projektion zweier durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden T_l, T_r. Schneidet die eine dieser beiden Erzeugenden, etwa diejenige, welche der »linken« Tangenten entspricht, die Gerade J, so schneidet die andere, welche als dann der »rechten« Tangenten entspricht, die Gerade K. Der Streifen entspricht der durch 2 Erzeugende verschiedener Art bestimmten Tangentialebene der Fläche.

Betrachtet man weiter den Spurkreis (Beweise 5 und 6) als den Schnitt der Curvenebene mit einer Kugel, welche zugleich durch einen, senkrecht über dem Mittelpunkt des Spurkreises gelegenen Punkt 0 geht und projiciert nun aus 0 die Kreise α, β, γ stereographisch auf die Kugel, so erhält man mit den Bildern dieser Kreise auch die Bilder der auf den Kreisen α, β, γ liegenden Punkte der betreffenden Tangentenpaare. Die Verbindungsgeraden dieser Bildpunkte liefern dreimal zwei Erzeugende der Fläche 2.0, welche die Curvenebene in den 6 Berührungspunkten der Tangenten schneiden.

Dabei ist noch zu bemerken, dass man, ausgehend von den bei (2) nnd (5) benützten Kreisen zu einem Hyperboloid gelangt, welches von der construierten Kugel doppelt berührt und zugleich nach denjenigen beiden Kreisen geschnitten wird, welche den Kreisen δ und ε der Curvenebene entsprechen.

---

[1]) Cyklographie. Teubner, Leipzig, 1882.

ET BEVIS FOR NEWTONS SÆTNINGER OM SYMMETRISKE FUNKTIONER AF EN LIGNINGS RØDDER.

(AF ADOLPH STEEN).

Ligningen

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

antages at have Rødderne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, hvoraf følgende symmetriske Funktioner skulle findes:

$$s_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_n^p$$

for alle hele p. Samtidig findes Funktioner, som betegnes

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \alpha_{r+1}^{p-r},$$

hvorved forstaas Summen af alle Produkter af de første Potenser af r Rødder og $(p-r)$'te Potens af en Rod.

Multipliceres (1) med x^{p-n}, indsættes derefter for x efterhaanden alle Ligningens Rødder, og adderes Resultaterne, saa faas,

$$s_p + a_1 s_{p-1} + \ldots + a_{n-1} s_{p-n+1} + a_n s_{p-n} = 0, \qquad (2)$$

saa at enhver af de symmetriske Funktioner s kan findes af de n paafølgende med lavere eller højere Indices.

Enkelte af dem faas umiddelbart og ved Hjælp af Koefficienternes Sammensætning af Rødderne, saaledes

$$s_0 = n, \; s_1 = -a_1, \; s_{-1} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Der kan dernæst findes simple Relationer imellem 2, 3, 4.... paa hverandre følgende Funktioner, naar den ovennævnte Funktion $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \alpha_{r+1}^{p-r}$ tages til Hjælp.

Man har $\qquad s_p = s_p,$

$$a_1 s_{p-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots \alpha_p)(\alpha_1^{p-1} + \alpha_2^{p-1} \ldots \alpha_n^{p-1}) = \\ - s_p - \Sigma \alpha_1 \alpha_2^{p-1},$$

$$a_2 s_{p-2} = +(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 \ldots)(\alpha_1^{p-2} + \ldots \alpha_n^{p-2}) = \\ + \Sigma \alpha_1 \alpha_2^{p-1} + \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^{p-2},$$

$$a_3 s_{p-3} = \ldots\ldots\ldots = -\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^{p-2} - \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4^{p-3},$$

. . . .

$$a_r s_{p-r} = (-1)^r \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r . (\alpha_1^{p-r} + \alpha_2^{p-r} \ldots \alpha_n^{p-r}) =$$
$$(-1)^r \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} \alpha_r^{p-r+1} + (-1)^r \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \alpha_{r+1}^{p-r}.$$

Summen af disse Ligninger er

$$\left. \begin{array}{l} s_p + a_1 s_{p-1} + a_2 s_{p-2} + \ldots + a_r s_{p-r} = \\ \qquad (-1)^r \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \alpha_{r+1}^{p-r}, \end{array} \right\} \quad (3)$$

hvoraf ses, at den ved Σ betegnede Funktion afhænger af $r + 1$ paa hverandre følgende s. (3) indbefatter (2), idet alle a med højere Index end n ere 0 og ligesaa alle α, da de kunne betragtes som Rødder i den forelagte Ligning multipliceret med en Potens af x.

For at anvende (3) til Beregning af s, maa man sætte $r = p - 1$, hvorved faas, idet $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} \alpha_p$ dannes p Gange,

$$s_p + a_1 s_{p-1} + \ldots + a_{p-1} s_1 = (-1)^{p-1} p \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p = -p a_p$$

eller i den sædvanlige Form

$$s_p + a_1 s_{p-1} + \ldots + a_{p-1} s_1 + p a_p = 0,$$

hvorved efterhaanden Beregning af $s_2, s_3 \ldots s_n$ bliver mulig, og saaledes alle andre s kunne findes.

LØSNING AF OPGAVERNE 466 OG 498.

---

466. **Konstruer en Firkant af de 4 Sider, saaledes at to paa hinanden følgende Vinkler blive lige store.**

Lad Firkanten være $ABCD$, $\angle A = \angle D$ og BC skjære AD i O samt $AB < DC$. En ret Linie gjennem B parallel med CD skjærer AD i D_1; man har da $AB = BD_1$, hvoraf $\frac{OB}{AB} = \frac{BC}{DC - AB}$, heraf bestemmes OB.

Man afsætter da paa en ret Linie Punkterne O, B og C. Om B som Centrum slaar man derpaa en Cirkel med Radius AB og trækker en vilkaarlig Linie gjennem O, der skjærer Cirklen i

M og N; gjennem C trækkes en Linie, parallel med BN, der skjærer ON i N_1. Da man nu har $OA . OD = OM . ON_1$, bestemmes OA ved gjennem M og N_1 at tegne en vilkaarlig Cirkel og gjennem O at trække en Linie, af hvilken Cirklen afskjærer en Korde lig AD; Afstanden fra O til Skjæringspunktet med Cirklen er da lig AO. Med O som Centrum og Radius OA slaar man endelig en Cirkel, der skjærer Cirklen om B i det søgte Punkt A, hvorpaa OA forlænges til D.

(A. S. Bang.)

498. Konstruer en indskrivelig Firkant af Afstandene fra Diagonalernes Skjæringspunkt til Siderne.

(C. Juel.)

Denne Opgave løses let ved Hjælp af følgende Sætning: I en indskrivelig Firkant forholde to af Siderne sig omvendt som Diagonalernes Skjæringspunkts Afstande fra de modstaaende Sider.

Bevis:

Lad Firkanten være $ABCD$, Diagonalernes Skjæringspunkt O og O's Projektioner paa AB, BC, CD og DA være E, F, G og H.

Af $\triangle ABO \sim CDO$ følger $\frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OG}$.

Trækkes gjennem O en Linie parallel med AB, som skjærer AD i H_1, og en Linie parallel med BC, som skjærer CD i G_1, faar man $\triangle HOH_1 \sim \triangle GOG_1$, hvoraf $\frac{OH}{OG} = \frac{OH_1}{OG_1}$, endvidere er $\triangle H_1OG_1 \sim \triangle ABC$, hvilket giver $\frac{OH_1}{OG_1} = \frac{AB}{BC}$, og følgelig $\frac{AB}{BC} = \frac{OH}{OG}$, altsaa er Sætningen bevist.

Da man i Konstruktionsopgaven kjender Diagonalernes Skjæringspunkts Afstande fra Siderne, kjender man ogsaa Sidernes Forhold, og kan, ved at vælge en af Siderne vilkaarlig og af de derved fremkomne 4 Sider konstruere en indskrivelig Firkant, af denne finde den søgte ved Ligedannethedsmethoden.

(A. S. Bang.)

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von / Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund, Lund.
A. Th. Daug, Upsala.
H. Gyldén, Stockholm.
Hj. Holmgren, Stockholm.
Sophie Kowalevski, Stockholm.
C. J. Malmsten, Upsala.
G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes, Christiania.
O. J. Broch, Christiania.
S. Lie, Christiania.
L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz, Kjøbenhavn.
J. Petersen, Kjøbenhavn.
H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Side

Om Algebraens Grundprinciper. Af *Julius Petersen* 1

Elementare Beweise der Sätze von Brianchon und Pascal. Von *Carl Haase* 23

Et Bevis for Newton's Sætninger om Symmetriske Funktioner af en Lignings Rødder. Af *Adolph Steen* 30

Løsning af Opgaverne 466 og 498 31

L. 1885. 6.

578

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Tredje Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

Hoffensberg & Traps Etabl. — Kjøbenhavn.

1885.

ANDET HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

OM GRÆNSEVÆRDI OG IRRATIONALE TAL.

(AF J. L. W. V. JENSEN).

Naar man undersøger den Fremgangsmaade, hvorpaa vi med den naturlige Talrække som Udgangspunkt og ved Anvendelse af den almindelige mathematiske Methode, som Hankel har benævnt: »Princip der Permanenz formaler Gesetze«, ledes til at betragte og indføre først de almindelige rationale, og derpaa de forskjellige Arter af irrationale Størrelser, synes der ikke ved første Øjekast at vise sig nogen Grundforskjel i Behandlingen af de to Klasser af Størrelser, idet de begge ere indførte for at gjøre visse omvendte Regningsarter almengyldige og ifølge den gængse Fremstilling implicite ere definerede ved disse. For de irrationale Tals Vedkommende forekommer en saadan Fremgangsmaade mig imidlertid ikke at være tilstrækkelig. Naar vi, for at tage et bestemt Exempel, søge at bestemme det hypothetiske $\sqrt{2}$, som multipliceret med sig selv skal frembringe Tallet 2, saa er det indlysende, at et saadant Tal ikke findes blandt de rationale Størrelser; og ville vi definere $\sqrt{2}$ ved den omtalte Fordring, at $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ skal være lig 2, saa er dette utilstedeligt, saa længe vi ikke have defineret, hvad der bør forstaas ved Multiplikation af Faktorer, som ikke ere rationale. En saadan Definition kan kun ske ved Indførelsen af til Dels nye Begreber, idet jeg forudsætter, at vi ikke søge at komme ud over Vanskelighederne ved geometriske Betragtninger; thi afset fra, at saadanne Betragtninger til Trods for det pædagogiske Værd, man ikke kan frakjende dem, let paa et mere fremskredet Stadium kunne blive en Kilde til unøjagtige Sætninger ved Indførelsen af et Anskuelseselement, som uagtet sin tilsyneladende Simpelhed i Virkeligheden er sammensat af komplicerede Begreber, der netop fordre en Undersøgelse ved den Analyses Hjælp, de skulde begrunde, saa er det altid betænkeligt paa et væsentligt Punkt af Begrundelsen af en saa skarpt afgrænset Gren af de mathematiske Videnskaber som den rene algebraiske Størrelseslære at tage sin

Tilflugt til Betragtninger, hentede fra et helt andet Omraade. Hertil kommer ogsaa, at naar vi ved saadanne Betragtninger bedst tro at være ude over Vanskelighederne for alle rationale Potenser af irrationale Størrelser, optræde lignende Vanskeligheder atter under nye Former for de ved den sukcessive Udvidelse af Begreberne indførte irrationale Størrelser af nye Arter.

Vi maa derfor ad anden Vej søge at besejre Hindringerne, og denne Vej frembyder sig naturligt, hvis vi forsøge paa at bestemme $\sqrt{2}$ med Tilnærmelse ved rationale Tal, eller — nøjagtigere udtrykt — søge at bestemme en saadan Række af rationale Tal, at man ved at gaa tilstrækkelig langt frem i Rækken af disse Tals Kvadrater kan nærme sig til 2 med saa stor Tilnærmelse, det skal være. Herved ledes vi, hvis dette da ikke allerede er nødvendiggjort ved Behandlingen af de periodiske Decimalbrøker, til at indføre Begrebet Grænseværdi; men før end vi skride til Anvendelse af dette nye Begreb, maa vi fra et exakt Standpunkt give en klar og bestemt Definition og drage de nødvendige Konsekvenser heraf.

Naar vi betragte en ubegrænset Række af vilkaarlige rationale Størrelser

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

er det indlysende, at en saadan forelagt Række kan forholde sig paa følgende to Maader, som vi benævne Hovedtilfælde I og II:

I) Enten er det muligt at angive et vist Tal A af den Beskaffenhed, at a_n selv for nok saa store Værdier af n ikke i numerisk Værdi kan overskride A; i dette Tilfælde sige vi, at Størrelserne a_n alle ere endelige;

II) eller ogsaa finder dette ikke Sted; vi sige da, at Størrelserne a_n ikke alle ere endelige.

Betragte vi nu Hovedtilfældet I, kunne vi atter opløse dette i to Undertilfælde:

I_1) Enten nærmer a_n sig med voxende n en vis bestemt Grænseværdi a, hvilket vi betegne ved $Lim . a_n = a$, og herved forstaas foreløbig, at man kan paavise Tilstedeværelsen af en vis Størrelse a, som staar i et saadant Forhold til den betragtede Række, at man for et vist $n = N$ og alle større vil have

$$|a - a_n| < \delta, \text{[1]}$$

hvor δ er en forud opgiven vilkaarlig lille positiv Størrelse, forskjellig fra Nul;

I_2) eller ogsaa finder dette ikke Sted, i hvilket Tilfælde vi sige, at a_n oscillerer indenfor endelige Grænser.

Det andet Hovedtilfælde kan ogsaa deles i to Undertilfælde:

II_1) Enten vil for et vist $n = N$ og alle større

$$|a_n| > \frac{1}{\delta},$$

hvor δ har samme Betydning som ovenfor; i dette Tilfælde sige vi, at a_n voxer i det uendelige med n;

II_2) eller ogsaa finder dette ikke Sted, og da sige vi, at a_n oscillerer mellem uendelige Grænser.

Paa Grundlag af Definition I_1 beviser man let, at naar $Lim\ a_n$ og $Lim\ b_n$ existere, er $Lim\ (a_n + b_n) = Lim\ a_n + Lim\ b_n$, $Lim\ (a_n b_n) = Lim\ a_n \cdot Lim\ b_n$ og $Lim\ (a_n : b_n) = Lim\ a_n : Lim\ b_n$, hvor dog i sidste Tilfælde $Lim\ b_n$ ikke maa være Nul. Ligeledes vises let, at naar a_n bestandig er $\geqq b_n$, kan man ikke have $Lim\ a_n < Lim\ b_n$ o. s. v., saaledes at vi kunne regne med Grænseværdier som med andre rationale Tal; Hankel's »Permanenz« er bibeholdt.

Det maa dog her fastholdes, at disse Grænseværdier ifølge Definitionens Ordlyd skulle være rationale, da vi endnu ikke kunne tale om Differensen mellem irrationale og rationale Størrelser, og vi kunne derfor ikke med de rationale Tal og ovenstaaende Definitioner som eneste Grundlag komme til de irrationale Størrelser som Overgangsformer af de rationale. Vor Definition er endnu ufuldstændig, hvis den i det hele taget er heldig valgt, og vi maa da til I_1 føje en yderligere Bestemmelse. Den, man almindelig har valgt som særlig indlysende, er følgende.

Naar Størrelserne $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ danne en bestandig voxende (aftagende) Række, hvori intet Led kan blive større (mindre) end en vis Størrelse, maa a'_n nærme sig en vis bestemt Grænseværdi.

---

[1]) $|a - a_n|$ betegner den numeriske Værdi af $a - a_n$.

Da man let kan vise, at en saadan Grænseværdi ikke behøver at være rational, kan det nye Bestemmelseselement ikke udledes af Definition I_1, medens det omvendte heller ikke lykkes, og det bliver i denne Fremstilling et Axiom, idet vor Anskuelse om, at de to Bestemmelser ikke ere i Strid med hinanden, kun kan blive en Trossag. Ved Hjælp af dette Axiom kunne vi nu let bevise, at naar a_n og b_n nærme sig bestemte Grænseværdier, maa $(a_n b_n)$ ogsaa nærme sig en saadan, og naar vi endvidere som en nødvendig Definition paa Ligestorhed vedtage, at $Lim\, a_n \gtrless Lim\, b_n$, hvis $a_n \begin{cases} > b_n + \varepsilon \\ < b_n - \varepsilon \end{cases}$, hvor ε er en vis, af n uafhængig, lille Størrelse, medens vi, hvis ingen af Delene finder Sted, sætte $Lim\, a_n = Lim\, b_n$, hvilket ikke kan være i Strid med det foregaaende, ere vi endelig naaede til at kunne definere irrationale Størrelser og Regning dermed.

Det forekommer os dog ikke ganske klart, om det opstillede Axiom er en Nødvendighed, og vi fristes derfor til at stille det Spørgsmaal: Kunde vi ikke have opnaaet ganske det samme, ja maaske endnu mere, ved at have taget en anden Definition af Begrebet Grænseværdi til Udgangspunkt?

Skjønt den Vej, ad hvilken de mathematiske Sandheder i deres Sammenhæng have udviklet sig og ere blevne klarere og klarere opfattede, oftest i sine Hovedtræk anses for at være og maaske ogsaa er den i pædagogisk Henseende rigtigste, kan man dog ikke paastaa, at den bør følges, naar man i en ikke historisk Fremstilling vil søge at udvikle en Sætning o. l. paa videnskabelig Maade; man er her ofte tvungen til at gaa om ikke den omvendte, saa dog en ganske anden Vej, og det er ikke vanskeligt i al Almindelighed at angive, hvorledes en saadan Vej kan findes. Naar vi nemlig have løst et forelagt Problem ved Indførelsen af nye Begreber, givne ved visse Definitioner, kan det ofte lønne sig at søge de nødvendige Betingelser for disse Definitioners og Begrebers Gyldighed, og hvis man da kan vise, at disse Betingelser tillige ere tilstrækkelige eller med Bibeholdelse af deres Nødvendighed kunne omdannes, saa at

de blive tilstrækkelige, have vi herved omformet vort Problem til et andet dermed ækvivalent, hvis Løsning ad en ny Vej fører os til det forelagte.

Vi søge altsaa den nødvendige Betingelse for, at en Række Størrelser $a_1, a_2, \ldots$ have en Grænseværdi a, eller med andre Ord, for at

$$Lim\,(a - a_n) = 0.$$

Naar n' er et helt positivt Tal, der paa en aldeles vilkaarlig Maade afhænger af n, er det indlysende, at

$$Lim\,(a - a_{n+n'}) = 0$$

er ensbetydende med ovenstaaende Ligning, og ved Subtraktion af disse to finde vi derfor som en nødvendig Betingelse for Tilstedeværelsen af Grænseværdien a, at

$$Lim\,(a_{n+n'} - a_n) = 0,$$

eller nøjagtigere, at man altid, naar δ er en forud valgt vilkaarlig lille, positiv Størrelse, skal kunne angive et saadant Tal N, at man for $n = N$ og alle større vil have

$$|\,a_{n+n'} - a_n\,| < \delta.$$

At denne Betingelse tillige er tilstrækkelig, indses paa følgende Maade.

Man har

$$|\,a_{N+n'}\,| < |\,a_N\,| + \delta = A,$$

hvor n' er vilkaarlig, eller

$$-A < a_n < A, \text{ for } n > N,$$

og en forelagt Række, der opfylder den givne Betingelse, ses saaledes strax at kunne indordnes under Hovedtilfældet I. I Intervallet $(-A \ldots A)$ vil der altsaa findes et ubegrænset Antal (uendelig mange) af den forelagte Rækkes Led (a_n), og dele vi det i et vilkaarligt Antal mindre Dele, maa det samme være Tilfældet med mindst ét af de derved opstaaede mindre Intervaller. Det er imidlertid indlysende, at der ikke ved fortsat Deling kan findes blot to forskjellige Intervaller, i hvilke der findes uendelig mange Led, da dette vilde forudsætte, at vi i Uligheden

$$|\,a_{n+n'} - a_n\,| < \delta,\ n > N,$$

ikke kunde vælge δ vilkaarlig lille. Der findes saaledes et og

kun et Interval af den angivne Beskaffenhed, hvor langt den vilkaarlige Deling end fortsættes; men naar dette er Tilfældet, vil man let ved Hjælp af Definition I_1 i Forening med Axiomet kunne vise, at den forelagte Række maa nærme sig en bestemt Grænseværdi.

I Betingelsen for Existensen af en Grænseværdi, saaledes som den er given ved Definition I_1, forekommer selve den søgte Grænseværdi; dette er ikke Tilfældet med den nye Betingelse

$$|a_{n+n'} - a_n| < \delta,$$

og det er derfor indlysende, at alle Vanskelighederne ved Overgangen fra rationale til irrationale Tal fuldstændig falde bort, naar denne vælges som Udgangspunkt ved Behandlingen af Grænsebegrebet, idet vi som første Definition vedtage, at en forelagt Række er i Besiddelse af en Grænseværdi, naar den nævnte Ulighed finder Sted. Jeg skal her ikke gaa ind paa en nærmere Udvikling fra dette Synspunkt, idet jeg indskrænker mig til at henvise til de Mathematikere[1]), der i Overensstemmelse med Weierstrass og Ch. Meray[2]) benytte en saadan systematisk Fremgangsmaade, men til Slutning blot vise, hvor simpelt det opstillede Axiom kan udledes af den nye Definition.

Naar nemlig Størrelserne a_1, a_2, a_3, ... danne en Række, hvis Led voxe med voxende Indices, men ikke kunne blive større end et givet Tal, og man ikke til et vilkaarlig valgt δ kunde finde en Værdi af $n = N$, for hvilken Betingelsen for Grænseværdiens Existens var opfyldt, maatte der gives et ubegrænset Antal sammenhørende Værdier af n og n' $(n_1, n_2, \ldots n'_1, n'_2, \ldots)$, for hvilke Uligheden

$$a_{n+n'} - a_n \geqq \delta$$

fandt Sted. Denne Ulighed maatte da paa Grund af Rækkens Egenskaber saa meget mere være gjældende, naar n' blev ombyttet med et hvilket som helst større Tal. Er nu α det laveste Tal i

[1]) E. Heine: Die Elemente der Functionenlehre. Crelle's Journal, Bd. 74.
R. Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen. 1872.
R. Lipschits: Grundlagen der Analysis, Bd. I. 1877.

[2]) Nouveaux précis d'analyse infinitésimale, 1872.

Rækken (n), der er større end $n_1 + n'_1$, α' det tilsvarende Tal i Rækken (n'); β det laveste Tal i Rækken (n), der er større end $\alpha + \alpha'$, β' det tilsvarende i Rækken (n'), o. s. v., vilde man finde

$$a_\alpha - a_{n_1} \geqq \delta,$$
$$a_\beta - a_\alpha \geqq \delta,$$
$$a_\gamma - a_\beta \geqq \delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

som ved Addition vilde give, at Differensen mellem to Led i en Række, der henhører under Hovedtilfælde I, kunde gjøres større end en hvilken som helst forud opgiven Størrelse, hvilket er umuligt. Det er saaledes bevist, at Axiomet med det nye Grundlag for Grænsebegrebet kan bringes ud af Verden og fuldstændig overflødiggjøres ved de valgte Definitioner.

OM LIGNINGER, HVIS RØDDER KUNNE FREMSTILLES VED ET MED CARDANS FORMEL ANALOGT UDTRYK.

(AF A. S. GULDBERG).

I Tidsskrift for Mathematik 5. R. 2. Aarg. (1884) S. 191 findes under »Mindre Meddelelser« efter Perrin, Bulletin de la Soc. math. de France T. X., S. 139, meddelt en speciel Ligning af 5te Grad, hvis Rødder fremstilles ved en Formel analog med Cardan's for Ligningen af 3die Grad. Ligningen er følgende:

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

hvor $q = 0$ og $p^2 - 5r = 0$. Dens Rødder ere bestemte ved Formlen

$$x = \alpha \sqrt[5]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}} + \frac{1}{\alpha} \sqrt[5]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}},$$

hvor α er en af Værdierne af $1^{\frac{1}{5}}$.

I en Afhandling »Om Opløsningen af de algebraiske Ligninger«, der findes i Tidsskrift for Mathematik 2. R., 2. Aarg. (1866) S. 167 har jeg vist, hvorledes man kan bestemme Formen af Ligninger, hvis Rødder udtrykkes ved

$$x = \alpha^r \sqrt[n]{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^n}} + \alpha^{n-r} \sqrt[n]{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^n}},$$

hvor $\alpha = 1^{\frac{1}{n}}$ og r gives Værdierne $0, 1, 2, \ldots (n-1)$. Ovenstaaende Ligning er et specielt Tilfælde heraf, idet samme erholdes ved at sætte $n = 5$. Jeg har senere i et Par andre Afhandlinger[1]) behandlet dette Emne, som ikke er uden Interesse. Fuldstændigst er dog Problemet — saavidt mig bekjendt — blevet behandlet af Hr. Overlærer L. Sylow i en Afhandling i Nyt Magazin f. Naturvidenskaberne, hvori han bestemmer Formen for en Ligning af n'te Grad, hvis Rødder repræsenteres ved

$$x = R_1^{\frac{1}{n}} + R_2^{\frac{1}{n}},$$

hvor R_1 og R_2 ere Rødder i en kvadratisk Ligning.

Hr. Sylow har ved Hjælp af Theorien om symmetriske Funktioner fremstillet Ligningens Form, paavist, at den gjælder for n lige og ulige, samt at der gives ikke blot en Ligning, som tilfredsstilles ved nævnte Udtryk, men at der i Almindelighed for n ulige findes $\frac{n-1}{2}$ væsentlig forskjellige Former. Blandt disse $\frac{n-1}{2}$ forskjellige Ligninger gives der dog blot en Ligning, naar den kvadratiske Ligning er irreduktibel, medens de øvrige $\frac{n-3}{2}$ Former svare til en reduktibel kvadratisk Ligning. Saaledes vil de 5te Grads Ligninger, hvis Rødder kunne udtrykkes ved

$$x = \sqrt[5]{R_1} + \sqrt[5]{R_2},$$

hvor hverken $\sqrt[5]{R_1}$ eller $\sqrt[5]{R_2}$ ere rationale, have en af de to Former:

[1]) Se Nyt Magazin for Naturvidenskaberne 16de Bind og Christiania Videnskabsselskabs Afhandlinger for 1870.

$$x^5 - 5Bx^3 + 5B^2x = A,$$
$$x^5 - 2p^2Rx^2 - 5pRx = R + p^5R^2,$$

nemlig den første Form, hvis Ligningen

$$(R - R_1)(R - R_2) = 0$$

er irreduktibel, og hvis den er reduktibel, enten den første eller den anden. Den sidste Ligning er identisk med den under »Mindre Meddelelser« anførte, hvis Rødder udtrykkes ved $x_i = \alpha^i . a + \alpha^{2i} . b$.

For 7de Grads Ligninger faar man de 3 Former:

$$x^7 - 7Bx^5 + 14B^2x^3 - 7B^3x = A,$$
$$x^7 - 7p^3Rx^3 - 14p^2Rx^2 - 7pRx = R + p^7R^2,$$
$$x^7 - 7p^2Rx^4 - 7pRx^2 + 7p^4R^2x = R + p^7R^3.$$

Idet jeg henviser de Læsere, som maatte interessere sig derfor, til Overlærer Sylow's Afhandling, skal her kortelig anføres, hvorledes man kan finde den almindelige Form for Ligningen af n'te Grad, hvis Rødder repræsenteres ved

$$x = R_1^{\frac{1}{n}} + R_2^{\frac{1}{n}},$$

hvor R_1 og R_2 ere Rødder i en irreduktibel, kvadratisk Ligning[1])

Man betragte en Ligning af 2den Grad, hvis Rødder ere u_1 og u_2:

$$(u - u_1)(u - u_2) = u^2 - \alpha u + \beta = 0. \quad (1)$$

Man danner en ny Ligning af 2den Grad, hvis Rødder er u_1^n og u_2^n:

$$(z - u_1^n)(z - u_2^n) = z^2 - Az + B = 0. \quad (2)$$

Som symmetriske Funktioner af u_1 og u_2 ere A og B hele Funktioner af α og β. Man faar:

$$f(\alpha, \beta) = A \text{ og } \beta^n = B,$$

hvor f betegner en hel Funktion af n'te Grad med Hensyn til α. Af Lign. (2) erholdes:

$$z_1 = u_1^n = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \text{ og } z_2 = u_2^n = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}.$$

Følgelig bliver

---

1) Se »Om den algebraiske Ligning af n'te Grad, hvis Rødder repræsenteres ved Formelen $x = R_1^{\frac{1}{n}} + R_2^{\frac{1}{n}}$«. Christiania Videnskabsselskabs Afhandlinger for 1870.

$$\alpha = u_1 + u_2 = \sqrt[n]{\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}} + \sqrt[n]{\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}}.$$

Indsættes β^n for B og skrives derpaa x for α og B for β, faas:

$$x = \sqrt[n]{\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B^n}} + \sqrt[n]{\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B^n}}, \qquad (3)$$

som tilfredsstiller Ligningen:

$$f(x, B) - A = 0. \qquad (4)$$

Til Bestemmelse af $f(x, B)$ har man

ifølge Lign. (2) $\quad A = f(\alpha, \beta) = u_1^n + u_2^n$,

ifølge Lign. (1) $\quad \alpha = u_1 + u_2$ og $\beta = u_1 u_2$.

Paa Grund af den sidste Forbindelsesligning indses let — ligesom ved Ligningen af 3die Grad, hvor Cardan's Formel kommer til Anvendelse — at Ligningens n Rødder blive:

$$x = \omega^r \sqrt[n]{\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B^n}} + \omega^{n-r}\sqrt[n]{\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B^n}},$$

hvor ω er en primitiv Rod i Ligningen $\omega^n - 1 = 0$, og r gives Værdierne $0, 1, 2, \ldots (n-1)$.

For at bestemme Ligningens Form ligger det nær at benytte de Newton'ske Formler, hvilke ogsaa Hr. Sylow har anvendt. Her benyttes en anden Methode, der ogsaa med Lethed fører til Maalet:

Det er for det første klart, at den søgte Funktion maa have følgende Form:

$$u_1^n + u_2^n = (u_1 + u_2)^n + a_{2,n}(u_1 + u_2)^{n-2} u_1 u_2 + \\ a_{4,n}(u_1 + u_2)^{n-4}(u_1 u_2)^2 + a_{6,n}(u_1 + u_2)^{n-6}(u_1 u_2)^3 + \ldots,$$

thi Funktionen er homogen og af n'te Grad saavel med Hensyn til u_1 som u_2. Sættes $u_1 + u_2 = x$, $u_1 u_2 = B$, faas:

$$u_1^n + u_2^n = x^n + a_{2,n}x^{n-2}B + a_{4,n}x^{n-4}B^2 + a_{6,n}x^{n-6}B^3 + \ldots \qquad (5)$$

Differentieres med Hensyn til u_1 og bemærkes, at $\frac{dx}{du_1} = 1$ og $\frac{dB}{du_1} = u_2$, faas:

$$nu_1^{n-1} = nx^{n-1} + (n-2)a_{2,n}x^{n-3}.B + (n-4)a_{4,n}x^{n-5}B^2 + \ldots$$
$$+ a_{2,n}x^{n-2}.u_2 + 2a_{4,n}x^{n-4}.Bu_2 + \ldots$$

Et aldeles lignende Udtryk erholdes ved Differentiation med Hensyn til u_2, kun at man ombytter u_1 og u_2. Adderes disse to Udtryk, idet man bemærker, at $x = u_1 + u_2$, faas:

$$n(u_1^{n-1} + u_2^{n-1}) =$$
$$(2n + a_{2,n})x^{n-1} + (2(n-2)a_{2,n} + 2a_{4,n})x^{n-3}B + \ldots$$
$$\ldots + (2(n-2k)a_{2k,n} + (k+1)a_{2(k+1),n})x^{n-2k-1}B^k + \ldots$$

Sætter man i Lign. (5) $n - 1$ for n og multiplicerer med n hele Ligningen, faas:

$$n(u_1^{n-1} + u_2^{n-1}) = nx^{n-1} + na_{2,n-1}x^{x-3}B + \ldots$$
$$\ldots + na_{2k,n-1}x^{n-2k-1}B^k + \ldots$$

De to sidste Ligninger maa være identiske, følgelig Koefficienterne parvis lige store; altsaa faas:

$$2n + a_{2,n} = n,\ 2(n-2)a_{2,n} + 2a_{4,n} = na_{2,n-1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 2(n-2k)a_{2k,n} + (k+1)a_{2(k+1),n} = na_{2k,n-1}, \ldots\ldots$$

Af disse Ligninger erholdes de søgte Koefficienter, idet man bemærker, at $a_{2k,n-1}$ faas af $a_{2k,n}$, naar man for n skriver $n - 1$; man faar saaledes:

$$a_{2,n} = -\frac{n}{1},\ a_{4,n} = \frac{n(n-3)}{1.2},$$
$$a_{6,n} = -\frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3},\ a_{8,n} = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

. . . .

$$a_{2k,n} = (-1)^k \frac{n(n-k-1)(n-k-2)\ldots\ldots(n-2k+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots k}$$

Indsættes disse Værdier i Lign. (5), erholdes den søgte Funktion; sættes derpaa $u_1^n + u_2^n = A$, faas den søgte Ligning, som bliver:

$$x^n - \frac{n}{1}Bx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.\ 2}B^2x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}B^3x^{n-6} + \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^k\frac{n(n-k-1)(n-k-2)\ldots\ldots(n-2k+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots k}B^kx^{n-2k} + \ldots = A,$$

hvilken Ligning tilfredsstilles ved

$$x = \sqrt[n]{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^n}} + \sqrt[n]{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^n}}.$$

Er $n = 3$, faar man Cardan's Formel.

OM EULERS SÆTNING OM POLYEDRE.

(AF C. CRONE).

I Tidsskrift for Mathematik, 2. Række, 6. Aargang, 1870, Side 22 findes meddelt et Bevis for Eulers Sætning om Polyedre i dens mere begrænsede Form, som let kan udvides til at gjælde for den fuldstændige Sætning. Inden denne Udvidelse forsøges givet i det følgende, skal først Beviset gjentages i Korthed.

Et Polyeders Antal af Sideflader, Hjørnespidser og Kanter betegnes ved f, h og k, og Tallet $f + h - k$ sættes $= d$. Borttages 1 Sideflade af Polyedrets Overflade, hvorved den forvandles til en aaben Polyederflade, vil h og k blive uforandrede, medens f, altsaa ogsaa d, formindskes med 1. Borttages nu Sidefladerne 1 for 1 — dog kun saadanne som have frie Kanter — vil ved Borttagelsen af en Sideflade med n frie Kanter f formindskes med 1, h med $n - 1$ og k med n; d bliver følgelig uforandret. Naar der kun er 1 Sideflade tilbage, har d Værdien 1; d maa altsaa oprindelig have været $= 2$.

Det er ikke vanskeligt at se Indskrænkningerne, som dette Bevis er underkastet. Der maa ikke forekomme Sideflader, ved hvis Borttagelse Polyederfladen deles, altsaa saadanne, der ere begrænsede af flere adskilte Rande (flerdobbelt sammenhængende); der maa hele Tiden forekomme Sideflader med kun 1 sammenhængende Række frie Kanter, og endelig maa den Sideflade, der tilsidst er tilbage, være en saadan, for hvilken d er 1.

Man kan imidlertid sørge for, at disse Betingelser ere opfyldte. Tegnes i en Sideflade en brækket Linie med n Sider mellem 2

Punkter a og b af Randen, og betragtes dens Sider og Vinkelspidser som Kanter og Hjørnespidser, vil h forøges med $n + 1$ og k med $n + 2$, hvis hverken a eller b falder i nogen Hjørnespids af den forelagte Sideflade. Falder f. Ex. a i en Hjørnespids, vil h kun forøges med n, k med $n + 1$. Hvis den brækkede Linie deler Sidefladen i 2 Dele, vil den altsaa ikke forandre d; deler den ikke Sidefladen, vil den formindske d med 1. I Stedet for den brækkede Linie kan sættes en krum, idet man betragter dens Endepunkter som Hjørnespidser. En Sideflade med q adskilte Rande kan ved Indførelsen af $q - 1$ brækkede Linier bringes til kun at have 1 Rand; den er derved gjort enkelt sammenhængende, d. v. s. enhver brækket Linie, der nu tegnes i den, vil dele den. d er herved bleven formindsket med $q - 1$. Men Borttagelsen af en Sideflade, der paa denne Maade er gjort enkelt sammenhængende, vil dele Polyederfladen, og heller ikke er $d = 1$ for en saadan Sideflade; den maa derfor deles ved Indførelsen af brækkede Linier, indtil der ikke findes nogen Kant, som paa begge Sider af sig har samme Sideflade. I det Følgende tænkes alle flerdobbelt sammenhængende Sideflader omformede paa den her angivne Maade.

Sideflader med 1 enkelt Række fri Kanter kan vises altid at maatte forekomme ved en aaben, enkelt sammenhængende Polyederflade, altsaa en saadan, der altid deles af et Tversnit, som forbinder 2 Punkter af Randen. En saadan Polyederflade indses let kun at kunne have 1 Rand. Alle Sidefladerne kunne ikke have flere Rækker frie Kanter. I saa Fald kunde man nemlig i Polyederfladens Rand vælge 2 Punkter, der høre til forskjellige Rækker frie Kanter paa samme Sideflade, men ere forbundne ved 1 Række ikke frie Kanter; et Tversnit lagt langs denne sidste Række vilde da afskjære en Del af Polyederfladen, hvori den omtalte Sideflade ikke forekom, og som var begrænset af Tversnittet og 1 sammenhængende Stykke af den oprindelige Rand. I dette sidste kunde man atter paa samme Maade vælge 2 Punkter, som man forbandt med et Tversnit, og ved at blive ved paa denne Maade maatte man tilsidst komme til en enkelt Sideflade, hvis Rand var sammensat af det sidste Tversnit og 1 sammenhængende

Stykke af den oprindelige Rand. Denne Sideflade kunde imidlertid heller ikke i den oprindelige Polyederflade have indeholdt mere end 1 Række frie Kanter, hvilket vilde stride mod Forudsætningen. Det ovenfor meddelte Bevis for Eulers Sætning gjælder følgelig for en enkelt sammenhængende aaben Polyederflade, saa at man for denne har $d = 1$.

Vi betragte nu en vilkaarlig Polyederflade, som, hvis den er lukket, tænkes gjort aaben ved Borttagelse af en Sideflade. Det forudsættes, at Polyederfladen kan gjøres enkelt sammenhængende ved Indførelsen af et endeligt Antal Tversnit, og vi tænke os tegnet brækkede eller krumme Linier, hvor disse Tversnit skulle lægges, forsaavidt de ikke følge Polyederfladens Kanter. Disse Linier indføre nye Sideflader, Hjørnespidser og Kanter, men lade, efter hvad ovenfor er vist, d uforandret. Lægges nu et Snit langs en saadan Linie, vil enhver Kant eller Hjørnespids deri blive til 2, og da Hjørnespidsernes Antal er 1 større end Kanternes, vil altsaa d forøges med 1.

Ifølge det foregaaende faar man altsaa Eulers Sætning i sin udvidede Form:

Er ved et Polyeder det samlede Antal af Tversnit, der udkræves til at gjøre de flerdobbelt sammenhængende Sideflader enkelt sammenhængende s, Antallet af Tversnit, der udkræves til at gjøre Overfladen enkelt sammenhængende, t, har man:

$$d = 2 + s - t.$$

Man indser ogsaa let, at

Kan man paa forskjellige Maader gjøre en (aaben eller lukket) Polyederflade enkelt sammenhængende ved Indførelse af et endeligt Antal Tversnit, da er dette Antal ved alle Maaderne det Samme.

Det for denne sidste Sætning førte Bevis kan ogsaa anvendes ved den samme Sætning for krumme Flader. Kan en krum Flade gjøres enkelt sammenhængende ved et endeligt Antal Tversnit, tænkes der paa den tegnet et Antal Linier, der, hvis de vare Tversnit, vilde først gjøre Fladen enkelt sammenhængende og derpaa

dele den[1]). Disse Linier ville afgive Begrænsning for flere fuldstændig begrænsede, enkelt sammenhængende Dele af Fladen, som vi ville betragte som Sideflader. Punkter, hvori 2 Linier støde sammen, betragte vi som Hjørnespidser, de Liniestykker, der forbinde 2 Hjørnespidser, men selv ingen indeholde, som Kanter. Forsaavidt der paa begge Sider af en Kant ligger samme Sideflade, forbindes Kantens Endepunkter med en Linie, der tilligemed Kanten begrænser en ny Sideflade. Naar Fladen paa denne Maade er inddelt i Sideflader, kan det ovenfor angivne Bevis anvendes paa den.

ET BEVIS HOS ARCHIMEDES.

(AF S. A. CHRISTENSEN).

Man har ofte sagt, at Archimedes benyttede Differential- og Integralregning, idet blot Formen for Beviserne dækkede over den. Dette er for saa vidt Tilfældet, som han benyttede Exhaustionsbevismaaden, der kun er en skjult Anvendelse af Regning med uendelig smaat. Vi skulle her fremdrage et Exempel derpaa hentet fra hans Bog om Sphæroider og Konoider (Dr. Hejbergs Udgave Vol. I), der handler om Omdrejningslegemer frembragte ved Omdrejning af Ellipser, Parabler og Hyperblens ene Gren om første Axe.

Denne Afhandling sendte han som saa mange tilforn til Dositheos i Alexandria, for at de der boende lærde kunde faa Kjendskab til hans Arbejde. Han gaar deri ud paa at finde Volumen af Afsnit af disse Legemer afskaarne ved Planer i forskjellige Stillinger mod Axen. Dette udføres i en længere Række Sætninger der for os ingen Forskjel frembyde i Behandlingen, for at faa alle mulige Tilfælde med efter Planernes forskjellige Stilling i de

[1]) Hvis Fladen ikke er aaben, tænkes den først gjort aaben ved at der skjæres et Hul i den; enhver af Linierne skal forbinde 2 Punkter, der enten ligge i Rande eller i andre af Linierne.

forskjellige Legemer. Først i Sætning 21 faar han den første Volumenberegning udført. De tidligere ere medgaaede til Undersøgelser om Snittenes Art og Tangentplaner m. m. hørende til disse Legemer, der ikke tidligere vare behandlede. Vi skulle her kun betragte det simple Tilfælde i Sætning 21, der kan tjene til Type for de andre senere.

Archimedes siger der, at et Segment af den retvinklede Konoide (ɔ: den, der frembringes ved Omdrejning af »Snittet i den retvinklede Kegle«, hvormed menes Parablen, et Navn, som Apollonios først senere indførte, afskaaret af en Plan vinkelret paa Axen) er Halvparten større end Keglen med samme Grundflade (Snittet) og samme Axe. Her bliver Axen naturligvis Højden. Han indfører nu strax i Beviset i Stedet for $\frac{3}{2}$ Gange Keglen det halve af Cylindren paa samme Grundflade og Axe.

Vi tage her først Beviset, som det føres nu ved Differential- og Integralregning, idet vi lægge Z-Axen i Konoidesegmentets Axe (her Konoidens Hovedaxe) og XY-Planen som Tangentplan i Toppunktet. Ligningen for Meridiankurven bliver da $x^2 = pz$. Skiven mellem to parallele Planer vinkelrette paa Axen bliver en Cylinder med Volumen $\pi x^2 dz$, naar Afstanden er uendelig lille. Fejlen, vi begaa, er saa lille, at vi kunne se bort fra den; det kan Archimedes imidlertid ikke, han kjender nemlig ikke til »uendelig lille«. Summen af disse Cylindre er $\int_0^h \pi x^2 dz = \int_0^h \pi pz dz = \frac{1}{2} \pi ph^2$, idet h er lig Axens Længde. Men det er netop det halve af Volumen af en Cylinder med Grundflade i Snittet (hvis Areal er πph) og Axen til Højde, og ogsaa lig $\frac{3}{2}$ Gange Keglen.

For et Snit ikke vinkelret paa Axen, hvis man bruger skjævvinklede Koordinater, faas aldeles den samme Relation.

Archimedes' Fremgangsmaade er kun forskjellig fra vor deri, at han ikke kan faa Legemets Volumen ved at summere de deri indskrevne Cylindre, thi han vilde derved begaa en endelig Fejl, da han ikke kan lægge Snittene uendelig nær hinanden. Han viser da først, at han kan dele Legemet ved parallele Snit i Skiver, hvori han kan lægge Cylindre med det mindste Snit til Grundflade

og med Skivernes Højde til Højde, og ligesaa kan han lægge Cylindre uden om Skiverne. Summen af de indskrevne er mindre, men Summen af de omskrevne større end Segmentets Volumen, og deres Forskjel kan gjøres mindre end en hvilken som helst given Størrelse, men denne Størrelse er for ham naturligvis »endelig«.

Skal han benytte dette til Beviset for Sætningen, maa han som overalt, hvor han bruger Exhaustion, føre Beviset antithetisk.

Han antager da først, at Segmentet er større end $\frac{3}{2}$ Gange Keglen (eller end det halve af den hele omskrevne Cylinder, som han stadig benytter), og desuden, at han efter den oven nævnte Sætning kan gjøre Forskjellen mellem de om- og indskrevne Cylindres Sum mindre end Forskjellen mellem Konoiden og $\frac{3}{2}$ Gange Keglen, hvilket fører til, at Summen af de indskrevne Cylindre er større end den halve store Cylinder. Urigtigheden af den første Antagelse beviser han, idet han betragter hver af de indskrevne Cylindre i Forhold til en Skive af den store med samme Højde. Forholdet mellem saadanne to er lig Forholdet mellem Kvadraterne af Radierne i Grundfladerne, der jo ere Ordinater i Parablen, nemlig den største og en mindre. Men han har af Parablens Ligning, at Forholdet mellem Ordinaternes Kvadrater er lig Forholdet mellem Abscisserne. Skal han have Summen af de smaa Cylindre til Summen af Skiverne af den store, gjælder det at summere disse Linier, der danne en Differensrække (vi summere ogsaa disse Linier i Integralet, men hos os er deres Antal uendelig stort). Han udfører det ved at danne en Trekant af Axen, den største Ordinat og en Linie fra Toppunktet til dennes Endepunkt, hvori der ved de andre Ordinater afskjæres Paralleltransversaler, som ere proportionale med Abscisserne. De summeres let i Forhold til Radierne i Skiverne af den store Cylinder, og han faar da, at Summen af de indskrevne Cylindres Forhold til den store er mindre end $\frac{1}{2}$. Da nu derved Antagelsen, at Segmentet er større end $\frac{3}{2}$ Gange Keglen, er vist ikke at kunne være rigtig, udføres det tilsvarende for den anden Antagelse, at Konoiden er mindre end $\frac{3}{2}$ Gange Keglen. Under samme Antagelse som før om Cylindrenes Differens maa følge, at Summen af de omskrevne

er mindre end $\frac{3}{2}$ Gange Keglen, hvad der nu paa aldeles tilsvarende Maade vises at være umuligt. Tilbage staar nu kun, at Konoiden netop maa være lig $\frac{3}{2}$ Gange Keglen, som derved er bevist at være rigtig.

Det Archimedes altsaa mangler for at kunne benytte Summeringen af de om- og indskrevne Cylindre direkte, er Sætningen, at to Størrelser liggende mellem de samme Grænser, hvis Forskjel kan gjøres saa lille man vil, maa være lige store, naar Størrelserne ere konstante. Men for at faa den mangler han kun et ringe Kjendskab til Betydningen af Begrebet »uendelig lille«, der saa vilde have ført til Differential- og Integralregningen, som den senere udvikledes, efter at dette Begreb var indført af Cavalieri og andre.

EXAMENSOPGAVER.

Polyteknisk Examen.

For Kemikere. Sept. 1884.

En Kurve er bestemt i et polært Koordinatsystem paa følgende Maade:

En ret Linie oprejst vinkelret paa Midten af Radius vektor til et hvilket som helst Punkt M paa Kurven skjærer to rette Linier igjennem Polen, som danne Vinklerne $+\frac{\pi}{4}$ og $-\frac{\pi}{4}$ med Systemets faste Axe i Punkterne B og C, hvis Afstande fra Polen have en konstant Sum $2a$, altsaa $OB + OC = 2a$.

Find Kurvens Ligning og Figur samt Arealet af Kurvens lukkede Del.

Opl. Af
$$OB = BM = \frac{1}{2} r \sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$
og
$$OC = CM = \frac{1}{2} r \sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$
faas
$$\frac{1}{2} r \left(\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right) = 2a,$$

som ændres til $$r = \frac{a\sqrt{2}\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$

Figuren har et Dobbeltpunkt i Polen med de to givne rette Linier til Tangenter. Om Axens positive Del ligger en Sløjfe, hvis yderste Punkt for $\theta = 0$ har $r = a\sqrt{2}$. Om den negative Del ligge to uendelige Grene (svarende til $\theta = \frac{\pi}{2}$) med en paa den faste Axe vinkelret Asymptote.

Arealet af Sløjfen bliver

$$a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta} d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta.$$

Det ubestemte Integral er

$$a^2 \sin 2\theta - 2a^2\theta + a^2 \operatorname{tg}\theta,$$

hvorefter Arealet bliver $(4 - \pi)\, a^2$.

For Mekanikere og Ingeniører. Jan. 1885.

1. I den totale Differentialligning

$$(y + 2zxu)\, dx + (x + 2zyu)\, dy + u dz = 0$$

er u en Funktion af x og y alene. Bestem u saaledes, at denne har en primitiv Ligning imellem x, y, z og en arbitrær konstant, og find den primitive Ligning.

Opl. Betingelsen for Integrabiliteten er

$$x\frac{du}{dx} - y\frac{du}{dy} = 2(x^2 - y^2)\, u,$$

hvilket er en partiel lineær Differentialligning af første Orden til Bestemmelse af u. Man faar

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{2(x^2 - y^2)\, u} = \frac{2xdx + 2ydy}{2(x^2 - y^2)},$$

som give

$$xy = c_1 \quad \text{og} \quad u = c_2 e^{x^2+y^2},$$

saa at man skal have

$$u = e^{x^2+y^2}\, \varphi(xy),$$

hvis Rigtighed let kan prøves.

Den forelagte Ligning kan nu efter Indførelse af u og Division med $\varphi(xy)$ ændres til

$$\frac{ydx+xdy}{\varphi(xy)}+ze^{x^2+y^2}(2\,xdx+2\,ydy)+e^{x^2+y^2}dz=0,$$

der umiddelbart giver

$$ze^{x^2+y^2}+\int\frac{d\,.\,xy}{\varphi(xy)}=C.$$

Ses ikke denne simple Fremgangsmaade, kan man ogsaa skrive Ligningen saaledes

$$\left(\frac{ye^{-(x^2+y^2)}}{\varphi(xy)}+2\,zx\right)dx+\left(\frac{xe^{-(x^2+y^2)}}{\varphi(xy)}+2\,yz\right)dy+dz=0,$$

hvoraf ad den sædvanlige Vej findes

$$U=z+e^{-(x^2+y^2)}\left(\int\frac{d\,.\,xy}{f(xy)}-Y\right)=0,$$

som giver $$\frac{dY}{dy}=0,\ Y=C.$$

2. Find den almindelige partielle Differentialligning af første Orden, der gjælder for Omdrejningsflader, og angiv dens geometriske Betydning.

Anvend den dernæst til at undersøge, om

$$2\,yz^2+2\,y^2z-x^2y-x^2z-a^3=0$$

er Ligning for en Omdrejningsflade, og find i saa Tilfælde dens Axe og Meridiankurve.

Opl. For Omdrejningsflader med Ligning $U=0$ gjælder

$$\begin{vmatrix}\frac{dU}{dx} & A & x-a\\ \frac{dU}{dy} & B & y-b\\ \frac{dU}{dz} & C & z-c\end{vmatrix}=0,$$

idet a, b, c er Centrum for den frembringende Kugle paa Axen med Ligningerne

$$\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C}.$$

Ligningen udtrykker, at Normalen til Fladen gaar igjennem Axen.

Den bliver for Exemplet til

$$\begin{vmatrix} -2xy-2xz & A & x-a \\ 2z^2+4yz-x^2 & B & y-b \\ 4yz+2y^2-x^2 & C & z-c \end{vmatrix} = 0,$$

som tilfredsstilles for alle x, y, z, saafremt $A = 0$, $B = C$, $a = 0$, $b = c$. Axens Ligninger blive altsaa $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ og Meridiankurvens

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ 2yz(y+z) = a^3 \end{matrix}\right\}$ med Asymptoter $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 0$.

Umiddelbart kan Ligningen omskrives, idet $2yz = (z+y)^2 - z^2 - y^2$ indføres, til

$$x^2 + y^2 + z^2 = (y+z)^2 - \frac{a^3}{y+z},$$

stemmende med det fundne.

3. En Partikel er bunden til at bevæge sig paa en Cirkel med Radius a uden Gnidningsmodstand.

a. Find dens Hastighed og Tryk paa Cirklen, naar denne er lodret stillet og Tyngdekraften ene virkende.

b. Der virker kun Tiltrækning til et fast Punkt O paa Cirklen, som tages til Begyndelsespunkt, idet Partiklen udgaar fra et Punkt i Afstanden a fra O med Hastigheden u. Loven for Tiltrækningen ($\varphi(r)$) som Funktion af Afstanden r bestemmes saaledes, at Trykket bliver konstant, og det afgjøres, hvilken Intensitet Tiltrækningen maa have, for at det skal blive 0.

a. $v^2 = 2g(y+h)$, $P = \frac{v^2}{a} + g\frac{y}{a} = \frac{g(3y+2h)}{a}$.

b. $v^2 = -2\int_a^r \varphi(r)\,dr + u^2$, $2a\cos\theta = r$ (Cirklens Ligning).

Trykket er $P = \frac{v^2}{a} - \varphi(r)\cos\theta = \frac{u^2}{a} - \frac{2\int\varphi(r)\,dr}{a} - \frac{r\varphi(r)}{2a}$,

som ved Differentiation giver

$$0 = -2\varphi(r) - \frac{1}{2}r\varphi'(r) - \frac{1}{2}\varphi(r),$$

hvoraf
$$\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{5}{r},\quad \varphi = \frac{\mu}{r^5}.$$

Derefter faas

$$P = \frac{u^2}{a} - \frac{\mu}{2a\alpha^4},$$

saa at $P = 0$ giver Intensiteten $\mu = 2u^2\alpha^4$.

Alm. Forberedelsesexamen. Jan. 1885.

Arithmetik.

1. Find x udtrykt ved a, b og c af Ligningen

$$ax^2 + bx + c^2 = 0$$

og beregn x, naar $a = 4$, $b = -80{,}44$, $c = 18{,}423$, hvorved benyttes saadanne Lettelser i Regningen, som faas ved en bekjendt algebraisk Formel og ved Logarithmer.

2. a. Udtrykket $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ bringes paa sin simpleste Form.

b. Ligningen $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} = \frac{b-x}{\sqrt{b}+\sqrt{x}}$ opløses med Hensyn til x, og x beregnes for $a = 5 + \sqrt{3}$, $b = 5 - \sqrt{3}$.

3. Kjøbmand A i Kjøbenhavn leverer Kjøbmand B i Brøndshøj hver Maaned en vis Mængde Varer, som B skal begynde at betale, naar han har tjent saa meget, at han kan afse et maanedligt Afdrag. I a Maaneder betaler han intet, men den første Maaned derefter indløser han 1 Maaneds Regning, den næste 2, den følgende 3 o. s. v., hver Maaned 1 mere end den foregaaende, samtidig med, at han faar en ny Levering. Om hvor mange Maaneder fra Afdragenes Begyndelse vil al Gjælden være betalt? Ex. $a = 15$.

Opl. 1. Man faar $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac^2}}{2a}$

og naar Tallene indsættes

$$x = \frac{80{,}44 \pm \sqrt{80{,}44^2 - 16 \,.\, 18{,}423^2}}{8}.$$

Rodstørrelsen heri ændres til

$$\sqrt{(80{,}44 + 73{,}692)(80{,}44 - 73{,}692)},$$

som beregnet ved Logarithmer bliver 32,25, hvorefter faas

$$x = 14{,}09 \quad \text{og} \quad x = 6{,}02.$$

2. a. $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{a}.$

b. $\sqrt{a} + \sqrt{x} = \sqrt{b} - \sqrt{x}$ giver $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2},$

altsaa
$$x = \frac{b + a - 2\sqrt{ab}}{4} = \frac{5 - \sqrt{22}}{2}.$$

3. Antages Betalingen at være sket om x Maaneder, saa er der betalt $1 + 2 + 3 + \ldots + (x - 1) + x$ Regninger, men der skyldes til samme Tid $a + x$, følgelig maa $1 + 2 + 3 + \ldots + (x - 1) = a$

eller
$$\frac{x(x-1)}{2} = a.$$

Denne Ligning ordnet, nemlig
$$x^2 - x - 2a = 0,$$

giver opløst
$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{8a + 1}}{2}.$$

Den negative Løsning vedkommer ikke Opgaven; den anden giver for $a = 15$

$$x = 6.$$

Praktisk Regning.

1. A har til Gode hos B siden den 1. Januar 1883 7690 Kr., som skulle betales den 1. Januar 1887 med 4 pCt. Rente og Rentes Rente, og hos C 1306 Kr., som forfalde til Betaling samme Dag uden Rentetillæg. Derimod skal A betale D 9300 Kr. den 1. Januar 1885. A og D enes nu om, at D skal vente med Betalingen til den 1. Januar 1887 og da modtage de Beløb, som B og C skylde A, og dermed skal alt være afgjort imellem dem. Hvor mange pro Cent faar saa D i Rente og Rentes Rente af sine Penge?

2. A. har kjøbt til Forhandling 280 Td. Hvede til 13,90 Kr. Tønden med $1\frac{1}{4}$ pro Cent Omkostninger. B lige saa 325 Td. til 11,75 Kr. Tønden med $1\frac{1}{2}$ pro Cent Omkostninger. De sælge dem

under et med $11\frac{1}{9}$ pro Cent Fordel og dele Salgsprisen lige. Hvor meget faar hver?

Opl. 1. Betegnes de søgte pro Cent ved x, saa skal

$$7690 . 1{,}04^4 + 1306 = 9300\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2,$$

hvoraf faas
$$1 + \frac{x}{100} = \sqrt{\frac{7690 . 1{,}04^4 + 1306}{9300}}.$$

Ved Anvendelse af Logarithmer findes

$$x = 100\,(1{,}0525 - 1) = 5{,}25,$$

altsaa $5\frac{1}{4}$ pro Cent.

2. Hver faar

$$\frac{1}{2}\left(280 . 13{,}90 . 1{,}0125 + 325 . 11{,}75 . 1{,}015\right)\frac{10}{9} = 4342{,}60 \text{ Kr.}$$

Geometri.

1. Igjennem et givet Punkt af en ligebenet Trekants Grundlinie skal drages en Linie, som halverer Trekanten. Hvorledes konstrueres den?

2. Om Trekanten ABC ($\angle B < \angle C$) er der omskrevet en Cirkel, og til Punktet A deri er der trukket en Tangent, som forlænges til Skjæring med Forlængelsen af BC i D. Bevis, at $\triangle ACD$ og $\triangle ABD$ ere ligedannede, og find $AD = t$, samt $CD = x$ udtrykte ved Trekanten ABC's Sider a, b, c.

3. I en regelmæssig Femkant $ABCDE$ er der fra en Vinkelspids A trukket 2 Diagonaler, hvis Længde er d. Hvorledes udtrykkes Femkantens Side ved d?

Fremdeles er der om A som Centrum slaaet en Cirkelbue med Radius d, de to fra A udgaaende Sider ere forlængede til Skjæring med Buen, og endelig er der fra hvert af disse Skjæringspunkter draget Korder til det nærmeste af Punkterne C og D. Hvilket Forhold er der imellem Arealet af Femkanten og det samlede Areal af de tre ligebenede Trekanter med Toppunkt i A?

Opl. 1. Trekantens Grundlinie være AB med Punktet P nærmest ved A, C dens Toppunkt. Da Trekanten vil være hal-

været ved en Linie fra C til Midten M af AB, saa kommer det kun an paa at trække en Linie igjennem P til den skjærer BC i et Punkt Q saaledes, at $\triangle PCM = \triangle PCQ$. $MQ \neq PC$ bestemmer Q.

2. Trekanterne have Vinklen ved D fælles, $\angle BAD = \angle ACD$ (de maales ved samme Bue). De ligedannede Trekanter give dernæst

$$\frac{a+x}{t} = \frac{t}{x} = \frac{c}{b},$$

hvoraf

$$\left.\begin{array}{r} b(a+x) = ct \\ cx = bt \end{array}\right\} \text{ altsaa } \frac{b(a+x)}{cx} = \frac{c}{b},$$

som giver $$x = \frac{ab^2}{c^2 - b^2},$$

følgelig $$t = \frac{c}{b}\, x = \frac{abc}{c^2 - b^2}.$$

3. Da Femkantens Centrivinkel er 72°, maa de to Diagonaler ved A danne en Vinkel paa 36° samt i Forbindelse med Siden $CD = s$ en ligebenet Trekant, der er Centraltrekant i en regelmæssig Tikant med største Radius d. Altsaa er

$$s = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\, d.$$

Kaldes $\triangle ACD$ for t, saa er Trekanternes samlede Areal $T = 3t$. Femkantens Areal er $F = t + 2ABC$, og man har

$$\frac{ABC}{t} = \frac{s}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Følgelig $F = t\sqrt{5}$. Det søgte Forhold er altsaa

$$\frac{F}{T} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

4de Klasses Hovedexamen og alm. Forberedelsesexamen. Marts 1885.

Arithmetik.

1. 7500 Kroner, som ere anbragte i en Forretning, trækkes ud deraf efter 10 Aars Forløb og medbringe da et Udbytte af 8080 Kroner. Hvor mange pro Cent maatte Kapitalen 7500 Kr.

have givet i aarlig Rente i de 10 Aar for med Rente og Rentes Rente at stige til det 8080 Kr. større Beløb?

2. Find x og y af Ligningerne

$$a(x+y)+b(y-x)=2a^2-2b^2$$
$$a(x-y)+b(x+y)=4ab.$$

3. Find x af Ligningen

$$9^{x+1}\,.\,243^{\sqrt{x}}=1$$

og prøv Opløsningens Rigtighed.

Opl. 1. $7500(1+r)^{10}=7500+8080=15580$. Procenten er da

$$100r=100\left(\sqrt[10]{\frac{1558}{750}}-1\right)=7{,}58.$$

2. Opløste med Hensyn til $x+y$ og $x-y$ give Ligningerne

$$\left.\begin{array}{l}x+y=2a\\ x-y=2b\end{array}\right\}\text{ altsaa }\left\{\begin{array}{l}x=a+b\\ y=a-b.\end{array}\right.$$

3. $(x+1)\log 9+\sqrt{x}\log 243=0$. Division med $\log 3$ giver

$$2x+5\sqrt{x}+2=0;\quad \sqrt{x}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\ -2.\end{cases}$$

Prøve
$$9^{\frac{5}{4}}\,.\,243^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{2}}\,.\,3^{-\frac{5}{2}}=1$$
$$9^{5}\,.\,243^{-2}=3^{10}\,.\,3^{-10}=1.$$

Geometri.

1. En Trekants Perimeter skal være lig en given afsat ret Linie, og dens Sider a, b, c skulle være saadanne, at

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{1\frac{1}{4}}=\frac{c}{\sqrt{5}}.$$

Konstruer Trekanten.

2. Fra et Punkt O udenfor en Cirkel er der trukket to Linier, af hvilke den første skjærer Cirklen først i A, dernæst i C, den anden først i B og derpaa i D. Naar nu $OA=5'$, $OB=6'$, $OD=10'$, hvor stor er da OC, og hvor stort er Forholdet imellem $\triangle AOB$ og $\triangle COD$?

Vis endelig, at $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

3. To Cirkler med Radier R og r have hver sin Sektor; den første med Buens Længde lig B, Gradeantallet N, den anden med

Buelængde b, Gradeantal n. Naar Sektorerne skulle være lige store i Areal, hvorledes bestemmes da $\frac{B}{b}$ og $\frac{N}{n}$ ved R og r, og hvilke Udtryk i Ord betegne disse Resultater?

Ex. Af $\frac{R}{r} = 4$, $b = 12'$, $n = 64^0$, findes B og N.

Opl. 1. Linien deles i Forholdet $1 : 1\frac{1}{4} : \sqrt{5} = 4 : 5 : \sqrt{8 . 10}$; de fundne Stykker ere Trekantens Sider.

2. Af $OA . OC = OB . OD$ faas $OC = 12'$, $\frac{\triangle AOB}{\triangle COD} = \frac{5 . 6}{10 . 12} = \frac{1}{4}$.

Trekanterne have en Vinkel lige stor og de indesluttende Sider proportionale, altsaa ere de ligedannede.

3. $S = \frac{N}{360} . \pi R^2 = \frac{1}{2} RB$, $s = \frac{n}{360} . \pi r^2 = \frac{1}{2} rb$. Da disse ere lige store, har man

$$\frac{N}{n} = \frac{r^2}{R^2}, \quad \frac{B}{b} = \frac{r}{R},$$

altsaa Gradantallene omvendt proportionale med Radiernes Kvadrater, Buelængderne omvendt proportionale med Radierne.

I Exemplet er $\frac{N}{n} = \frac{1}{16}$, $N = 4^0$, $\frac{B}{b} = \frac{1}{4}$, $B = 3'$.

Alm. Forberedelsesexamen. Marts 1885.

Praktisk Regning.

1. 3 Kjøbmænd kjøbe hver sin Kasse Appelsiner med Omkostninger $12\frac{1}{2}$ pro Cent af Indkjøbsprisen.

A. sælger sine for 12 Øre Stykket og tjener 20 pCt. Hvor mange var der i Kassen, naar denne har kostet 48 Francs, og 1 Franc = 75 Øre = 100 Centimer?

B.'s Kasse indeholdt 378 Appelsiner, han har solgt dem for 12 Øre Stykket og tjent 20 pro Cent. Hvad har hans Kasses Indkjøbspris været i Francs og Centimer?

C. har sorteret de 432 Appelsiner i sin Kasse saaledes, at

han har solgt en Fjerdedel til 10 Øre Stykket, Halvdelen til 12 Øre og Resten til 16 Øre. Indkjøbsprisen for Kassen var 50 Francs 40 Centimer; hvor mange pro Cent har han tjent?

2. Naar Jordens Ækvator er 5,400 Mile lang, Jordens Overflade 4 Gange saa stor som Arealet af den Cirkel, Ækvator begrænser, de to kolde Belter udgjøre 0,0826, de to tempererede 0,5195 af Jordens Overflade, og det varme Belte Resten, hvor mange Kvadratmil maa da hvert af de 5 Belter, hvori Jorden er delt, optage?

(Regnes med Logarithmer).

Opl. A. har udgivet $48 . \frac{9}{8}$ Francs i Indkjøbspris og Omkostninger. Dette Beløb er $48 . \frac{9}{8} . \frac{3}{4}$ Kroner, som med de tjente 20 pro Cent bliver $48 . \frac{9}{8} . \frac{3}{4} . \frac{6}{5} . 100$ Øre. Altsaa indeholdt Kassen

$$\frac{48}{12} . \frac{9}{8} . \frac{3}{4} . \frac{6}{5} . 100 = 405 \text{ Appelsiner.}$$

B. har faaet 378 . 12 Øre for sin Frugt, hvilket i Francs er $\frac{378}{100} . 12 . \frac{4}{3}$, hvorved 20 pro Cent er Fortjeneste, altsaa bliver $\frac{378}{100} . 12 . \frac{4}{3} . \frac{5}{6}$ Udgiften til Indkjøb og Omkostninger. Da disse udgjøre $12\frac{1}{2}$ pro Cent, maa

$$\frac{378}{100} . 12 . \frac{4}{3} . \frac{5}{6} . \frac{8}{9} = 44 \text{ Francs } 80 \text{ Centimer}$$

være Indkjøbsprisen.

C har faaet for sine Varer

$$(108 . 10 + 216 . 12 + 108 . 16) \frac{4}{3} . \frac{1}{100} = 72 \text{ Francs}$$

og har udgivet til Indkjøb og Omkostninger $50{,}40 . \frac{9}{8} = 56{,}70$ Francs. Forskjellen 15,30 Francs er Fortjeneste. Han har altsaa tjent

$$\frac{100 . 15{,}30}{72} = 21\frac{1}{4} \text{ pro Cent.}$$

2. Det varme Belte udgjør 1 — 0,0826 — 0,5195 = 0,3979 af hele Jorden. Man vil da, idet Jordens kolde Belter tilsammen betegnes med k, de tempererede ved t og det varme ved v, have

$$\frac{k}{0,0826} = \frac{t}{0,5195} = \frac{v}{0,3979} = \frac{4 \,.\, 2700^2}{\pi \,.\, 1,0000},$$

følgelig $k = 4 \,.\, 2700^2 \,.\, 0,0826 : \pi$ $\qquad log\, k = 5,88461$

$t = 4 \,.\, 2700^2 \,.\, 0,5195 : \pi$ $\qquad log\, t = 6,68322$

$v = 4 \,.\, 2700^2 \,.\, 0,3979 : \pi$ $\qquad log\, v = 6,56740.$

Deraf faas

k = 766700 Kvadratmil, hvert af de kolde Belter 383350 Kvadratmil

t = 4821900 — — - - tempererede 2410950 —

v = 3693200 — — - - det varme 3693200 —

Skolelærerexamen. Maj 1885.

Regneopgave Nr. 1. (3 Timer). A. forskriver fra Norge et Parti Is, som ved Indladningen vejer 193347 Pd. Isen, hvis Vægtfylde = 0,896, leveres i tærningformede Blokke, hver med en Kant paa $22\frac{1}{2}$ Tomme; den betales efter Vægt, hvorved Prisen paa hver Blok bliver 2 Kr. 17 Øre, dog saaledes, at Betalingen for den Del af Isen, som muligvis smelter paa Vejen hertil, skal nedsættes med $\frac{1}{3}$. Ved Modtagelsen her udreder A baade Indkjøbspris og Fragt, der tilsammen vilde have udgjort 1354 Kr. 8 Øre, hvis intet af Isen var smeltet, men nu udgjør en saadan Sum, at A har den Is, der er tilbage ved Udlosningen, til en Pris af $\frac{8}{9}$ Øre pr. Pd. Der spørges:

I. Af hvor mange Blokke bestod Ladningen?

II. Hvor stor var Fragten?

III. Hvor mange Pd. Is var der ved Udlosningen?

1 Kubikfod Vands Vægt sættes = 62 Pd.

Besvarelserne maa ved denne og de følgende Opgaver gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydelig ses.

Opl. $\left(\frac{45}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{12^3} \cdot 62 \cdot \frac{896}{1000} = \frac{5859}{16}$ Pd. = Vægten af 1 Blok.

$$\frac{193347 \cdot 16}{5859} = 528 \text{ Blokke (I).}$$

$$528 \cdot 217 \text{ Øre} = 1145{,}76 \text{ Kr.},$$

$$1354{,}08 - 1145{,}76 = 208{,}32 \text{ Kr.} = \text{Fragten (II).}$$

$$135408 - x \cdot \frac{217 \cdot 16}{5859} \cdot \frac{1}{3} = (193347 - x) \cdot \frac{8}{9};$$

$x = 52731$ Pd. (Svind); $193347 - 52731 = 140616$ Pd. Is (III).

Regneopgave Nr. 2. (2 Timer). Der søges Arealet af en Firkant $abcd$, hvori Vinkel $b = 60^0$, Vinkel $d = 90^0$; Siderne ab og bc ere hver $= (\sqrt[8]{348{,}458})^3$ Fod; $ad = cd$.

Firkanten skal ved en Linie, parallel med Diagonalen ac, deles i 2 lige store Dele; i hvilken Afstand fra ac skal denne Linie drages?

Paa Besvarelsen angives, hvilken Logarithmetavle Examinanden har benyttet.

Opl. I. $log\ ab = \frac{3}{8} \cdot log\ 348{,}458 = \frac{3}{8} \cdot 2{,}54215 = 1{,}52529$; $ab = 33{,}5192$.

$H = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 33{,}5192^2}$; $log\ H = \frac{1}{2}(log\ 0{,}75 + 2\ log\ 33{,}5192)$
$= \frac{1}{2}(3{,}05058 + 0{,}87506 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}92564 = 1{,}46282$; $H = 29{,}028$.

$y = \triangle\ abc = \frac{33{,}5192 \cdot 29{,}028}{2}$; $log\ y = 1{,}52529 + 1{,}46282$
$- 0{,}30103 = 2{,}68708$.

$\triangle\ abc = 486{,}5$ □ Fod.

$(ad = x)$; $2x^2 = 33{,}5192^2$; $\triangle\ adc = \frac{1}{2} x^2 = \frac{33{,}5192^2}{4} = p$.

$log\ p = 2 \cdot 1{,}52529 - 0{,}60206 = 2{,}44852$; $p = 280{,}88$ □ Fod.

Hele Arealet $= 486{,}5 + 280{,}88 = 767{,}38$ □ Fod.

II. $767{,}38 : 2 = 383{,}69 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$; $h = \sqrt{383{,}69 \cdot \sqrt{3}}$;

$log\ h = \frac{1}{2}(2{,}58398 + 0{,}23856) = 1{,}41127$; $h = 25{,}7794$;
$H - h = 29{,}028 - 25{,}7794 = 3{,}2486$.

Regneopgave Nr. 3. (2 Timer). Af 3 Arbejdere, A, B og C, udfører i samme Tid B $\frac{1}{5}$ mere end A, C $\frac{1}{6}$ mindre end B.

I. Hvor længe skulle alle 3 i Forening være om et Arbejde, som C alene kan udføre i $15\frac{3}{4}$ Dag?

II. Paa et andet Arbejde, som A og B tilsammen kunde have udført i $10\frac{5}{22}$ Dag, arbejder først A og C i 5 Dage, derpaa B og C i $4\frac{1}{2}$ Dag; hvor længe skal A alene være om at fuldføre Resten?

III. Et tredie Arbejde udføres saaledes, at B arbejder dobbelt saa længe som C, og A $1\frac{1}{3}$ Dag mere end B. Hvor længe arbejder hver, naar alle 3 i Forening kunde have udført Arbejdet i $17\frac{1}{7}$ Dag?

Forholdet mellem Arbejdsdygtigheden $= 1 : \frac{6}{5} : \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{9} = 15 : 18 : 16$.

I. C udfører daglig $\frac{1}{15\frac{3}{4}} = \frac{4}{63}$ af Arb.; A $\frac{4}{63} \cdot \frac{16}{15} = \frac{5}{84}$, B $\frac{4}{63} \cdot \frac{18}{16} = \frac{1}{14}$; $\frac{4}{63} + \frac{5}{84} + \frac{1}{14} = \frac{7}{36}$; Arb. varer $1 : \frac{7}{36} = 5\frac{1}{7}$ Dag.

II. A og B udføre daglig $\frac{1}{10\frac{5}{22}} = \frac{22}{225}$; heraf A $\frac{22}{225} \cdot \frac{15}{33} = \frac{2}{45}$; B $\frac{22}{225} \cdot \frac{18}{33} = \frac{4}{75}$; C $\frac{2}{45} \cdot \frac{16}{15} = \frac{32}{675}$.

A udfører i	5	Dage	$5 \cdot \frac{2}{45} = \frac{2}{9}$	
B —	- $4\frac{1}{2}$	—	$\frac{9}{2} \cdot \frac{4}{75} = \frac{6}{25}$	
C —	- $9\frac{1}{2}$	—	$\frac{19}{2} \cdot \frac{32}{675} = \frac{304}{675}$	
			Sum $\frac{616}{675}$;	

$$1 - \frac{616}{675} = \frac{59}{675};\ \frac{59}{675} : \frac{2}{45} = 1\tfrac{29}{30} \text{ Dag.}$$

III. Alle udføre daglig $\frac{1}{17\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}$ af Arb., heraf A $\frac{7}{120} \cdot \frac{15}{49} = \frac{1}{56}$; B $\frac{7}{120} \cdot \frac{18}{49} = \frac{3}{140}$; C $\frac{7}{120} \cdot \frac{16}{49} = \frac{2}{105}$.

C arb. x Dage.

$$x \cdot \frac{2}{105} + 2x \cdot \frac{3}{140} + (2x + 1\tfrac{1}{3}) \cdot \frac{1}{56} = 1.$$

$x = 10$; altsaa C 10 D., B 20 D., A $21\frac{1}{3}$ D.

OPGAVER TIL LØSNING.

520. Paa en Kugle er givet en vilkaarlig Cirkel og i den en vilkaarlig sfærisk Centervinkel. — Konstruer Toppunkterne af de to sfæriske Periferivinkler paa samme Bue som Centervinklen, som ere lig med Halvparten af denne.

(Thue).

521. Man skal bestemme Koefficienterne c saaledes, at følgende Lighed finder Sted for alle positive x:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} e^{-\nu^2 x} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{e^{\nu x}-1}.$$

(J. L. W. V. Jensen).

OPGAVER TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN.

(44 AF SCHJELLERUP, 45—46 EFTER MATHESIS T. V).

44. I en Firkant indskreven i en Cirkel fældes fra Diagonalernes Skjæringspunkt O vinkelrette paa Siderne. De fire Fodpunkter danne da Vinkelspidserne i en ny Firkant som kan omskrives om en Cirkel med Centrum i O.

Bevis dette.

46. I en retvinklet Trekant være A en af de spidse Vinkler og φ Vinklen mellem dennes Halveringslinie og Medianen til A. Bevis at $tg\ \varphi = tg^3\ \frac{1}{2}\ A$.

45. En Sekant skjærer Siderne AB og AC i Trekanten ABC i Punkterne B' og C' og den omskrevne Cirkel i M og N. Bevis at Cirklerne MBB' og MCC' røre hinanden i M.

Opl. Man søger Vinklerne mellem MN og Tangenterne i M.

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund, Lund.

A. Th. Daug, Upsala.

H. Gyldén, Stockholm.

Hj. Holmgren, Stockholm.

Sophie Kowalevski, Stockholm.

C. J. Malmsten, Upsala.

G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes, Christiania.

O. J. Broch, Christiania.

S. Lie, Christiania.

L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz, Kjøbenhavn.

J. Petersen, Kjøbenhavn.

H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

	Side
Om Grænseværdi og irrationale Tal. Af *J. L. W. V. Jensen*	33
Om Ligninger, hvis Rødder kunne fremstilles ved et med Cardan's Formel analogt Udtryk. Af *A. S. Guldberg*	39
Om Euler's Sætning om Polyedre. Af *C. Crone*	44
Et Bevis hos Archimedes. Af *S. A. Christensen*	47
Examensopgaver	50
Opgaver til Løsning	64
Opgaver til Brug ved Undervisningen	64

13

57

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

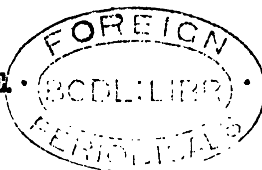
UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Tredje Aargang.



KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1885.

TREDIE OG FJERDE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

OM POTENSER AF UENDELIGE OG ENDELIGE RÆKKER OG OM RÆKKER FOR OMVENDTE FUNKTIONER.

(AF F. BUCHWALDT).

Indledning.

§ 1. Det kommer i Praxis ofte for, at man skal danne en Række, der er en Potens af en given Række. Er Potensexponenten et positivt helt Tal, saa kan Regningen udføres ved sukcessive Multiplikationer; men, naar man ikke kan nøjes med nogle ganske faa Led af Rækker, og Potensexponenten ikke er meget lille, bliver Udførelsen højst besværlig og let udsat for Fejltagelser. Er Potensexponenten ikke noget positivt helt Tal, saa vil man nærmest være henvist til at danne Koefficienterne i den nye Række ved Hjælp af Differentialkoefficienterne af den givne Rækkes Potenser; men ogsaa denne Fremgangsmaade vil i Reglen snart blive meget vidtløftig. Polynomialformlen (se Ramus' Algebra og Funktionslære S. 85) lader sig, naar ikke Potensexponenten er meget lille og positiv hel, neppe anvende i Praxis, saalænge man ikke ved andet om Dannelsen af Kombinationerne af Potensexponenterne $n_1, n_2, \ldots n_t$ til $p_1, p_2, \ldots p_t$ i det almindelige Led af Rækkeudviklingen for $(p_1 + p_2 + \ldots p_t)^n$ end, at naar n er positiv hel, $n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$, og at Antallet af Led eller af Kombinationer er »saa stort som det Antal Maader, hvorpaa n kan opløses i hele positive Addender, 0 medregnet, idet der tages Hensyn til Forskjelligheden af Addendernes Orden«.

Det følgende gaaer ud paa at finde en praktisk Løsning af Problemet og at paavise nogle af dens Anvendelser.

Af særlige Betegnelser vil der, foruden nogle, som først senere kunne omtales, blive anvendt følgende:

Et lille gothisk Bogstav ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$) vil blive brugt som Betegnelse for et positivt helt Tal eller 0.

Fremdeles sættes

$$\left.\begin{aligned}[\mathfrak{a}] &= \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{a}-2)\ldots.2.1,\\ [0] &= 1,\\ \{a\} &= a(a-1)(a-2)\ldots.(-\infty),\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

altsaa er
$$\frac{\{a\}}{\{a-\mathfrak{s}\}} = a(a-1)\ldots.(a-\mathfrak{s}+1)$$

og, naar $(\mathfrak{a}-\mathfrak{s}) \geqq 0$,

$$\frac{\{\mathfrak{a}\}}{\{\mathfrak{a}-\mathfrak{s}\}} = \frac{[\mathfrak{a}]}{[\mathfrak{a}-\mathfrak{s}]} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)\ldots(\mathfrak{a}-\mathfrak{s}+1);\ \frac{\{\mathfrak{a}\}}{\{0\}} = [\mathfrak{a}].$$

Er derimod $(\mathfrak{a}-\mathfrak{s}) \leqq -1$, saa bliver

$$\frac{\{\mathfrak{a}\}}{\{\mathfrak{a}-\mathfrak{s}\}} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)\ldots 1.0.(-1)\ldots(\mathfrak{a}-\mathfrak{s}+1) = 0.$$

Endnu mærkes, at

$$\frac{\{-\mathfrak{a}\}}{\{-\mathfrak{a}-\mathfrak{s}\}} = (-1)^{\mathfrak{s}} \frac{[\mathfrak{a}-1+\mathfrak{s}]}{[\mathfrak{a}-1]}. \quad (1)'$$

I. Potenser af Rækker.

§ 2. Skal man af

$$\eta = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} c_{\mathfrak{r}}\, \xi^{m+\mathfrak{r}p},$$

hvor $p > 0$, finde η^n, saa sættes først

$$\xi^p = x,\ \frac{c_{\mathfrak{r}}}{c_0} = a_{\mathfrak{r}} \text{ og } y = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} a_{\mathfrak{r}} x^{\mathfrak{r}},$$

som giver
$$\eta^n = c_0^n x^{\frac{mn}{p}} . y^n.$$

Man skal da bestemme Koefficienten $A_{\mathfrak{r}}^{(n)}$ for det almindelige Led i Rækkeudviklingen

$$y^n = \left(\sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} a_{\mathfrak{r}} x^{\mathfrak{r}}\right)^n = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_{\mathfrak{r}}^{(n)} x^{\mathfrak{r}}, \quad (2)$$

hvori $a_0 = 1$, og $A_0^{(n)} = 1$, samt naar $n = \mathfrak{n}$, ɔ: positiv hel, $A_{\mathfrak{n}\mathfrak{t}+1}^{(\mathfrak{n})} = A_{\mathfrak{n}\mathfrak{t}+2}^{(\mathfrak{n})} = \ldots = 0$.

Der maa skjelnes mellem de 2 Hovedtilfælde: $\mathfrak{t}$ uendelig eller $\geqq \mathfrak{r}$ og $\mathfrak{t}$ endelig, og for hvert af disse Hovedtilfælde atter mellem n positiv hel $= \mathfrak{n}$, og n ikke positiv hel.

I. A. Potenser af uendelige Rækker (t uendelig eller $\geqq$ r).

§ 3. Naar t = ∞ eller $\geqq$ r, maa Rækken for y forudsættes konvergent.

a. Potensexponenten n ikke positiv hel.

§ 4. Ifølge Binomialformlen og Formlerne (1) er

$$(a + xb)^n = \{n\} \sum_{s=0}^{s=r} x^s \frac{a^{n-s}}{\{n-s\}} \frac{b^s}{[s]} + \ldots,$$

idet de udeladte Led ere af (r + 1)'te og højere Grad med Hensyn til x. Heraf faas ved at sætte

$$\sum_{s=0}^{s=r} a_s x^s = a_0 + xb_1;\ b_1 = a_1 + xb_2;$$

$$\ldots b_{r-2} = a_{r-2} + xb_{r-1};\ b_{r-1} = a_{r-1} + xa_r,$$

$$\left(\sum_{s=0}^{s=r} a_s x^s\right)^n = \{n\} \sum_{s_1=0}^{s_1=r} x^{s_1} \frac{a_0^{n-s_1}}{\{n-s_1\}} \frac{b_1^{s_1}}{[s_1]} + \ldots$$

$$\frac{b_1^{s_1}}{[s_1]} = \sum_{s_2=0}^{s_2=s_1} x^{s_2} \frac{a_1^{s_1-s_2}}{[s_1-s_2]} \frac{b_2^{s_2}}{[s_2]} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{b_{r-1}^{s_{r-1}}}{[s_{r-1}]} = \sum_{s_r=0}^{s_r=s_{r-1}} x^{s_r} \frac{a_{r-1}^{s_{r-1}-s_r}}{[s_{r-1}-s_r]} \frac{a_r^{s_r}}{[s_r]} + \ldots$$

hvoraf det, idet $a_0 = 1$, fremgaar, at, naar $s_1 + s_2 + \ldots s_r = r$, vil Koefficienten $A_r^{(n)}$ til x^r komme til at bestaa af en Sum af Led af Formen

$$(n, r)_i = \frac{\{n\}}{\{n-s_1\}} \cdot \frac{a_1^{s_1-s_2}}{[s_1-s_2]} \cdot \frac{a_2^{s_2-s_3}}{[s_2-s_3]} \cdots \frac{a_{r-1}^{s_{r-1}-s_r}}{[s_{r-1}-s_r]} \cdot \frac{a_r^{s_r}}{[s_r]}\ (i), \qquad (3)$$

idet der ved den tilføjede Indexbetegnelse (i) er antydet, at $(n, r)_i$ er det af disse Led, som dannes af den i'te Kombination (»Sats«) af de r Størrelser s. Da Potensexponenterne til $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ skulle være $\geqq 0$, faar man til Bestemmelsen af disse Kombinationer Betingelserne:

$$\left.\begin{array}{c} s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_r = r \\ r \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \ldots \geqq s_{r-1} \geqq s_r \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Ethvert System af Værdier for de r Størrelser $s_1, s_2, \ldots s_r$, som tilfredsstille Betingelserne (4), ville

vi kalde en »Sats«. Antallet af saadanne Satser, hver især bestaaende af r »Satselementer«: $s_1, s_2, \ldots s_r$, maa være en Funktion af r alene og betegnes ved $\underline{r}$. Man har da

$$A_r^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=\underline{r}} (n, r)_i. \tag{5}$$

Dannelsen af de $\underline{r}$ Satser, som tilfredsstille Betingelserne (4), sker nu med den største Lethed og Sikkerhed ved Hjælp af disse Betingelser, idet man begynder med at give det første Element s_1 sin største Værdi r, hvortil svarer $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 0$. Dernæst sættes $s_1 = (r-1)$, hvortil svarer $s_2 = 1$, og $s_3 = s_4 = \ldots = s_r = 0$. For enhver af de følgende Værdier $(r-2), (r-3), \ldots 2, 1$ af s_1 gives $s_2, s_3, \ldots$. først de største, dernæst efterhaanden de mindre Værdier, som tilfredsstille Betingelsen, at Summen af Elementerne s skal være $= 0$, og at ethvert Element ikke maa være større end det nærmest foregaaende. Til $s_1 = 1$ maa som sidste, $\underline{r}$'te, Sats svare $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 1$. I alle de foregaaende Satser vil s_r være $= 0$. Enhver af Satserne: $s_1, s_2, \ldots s_r$ kan tænkes fortsat i det uendelige, eller saa langt man vil, med $s_{r+1} = 0$, $s_{r+2} = 0$, da dette ikke udøver nogen Indflydelse hverken i (3) eller (4).

Naar $r = 0$, faas da kun 1 Sats, der, endskjønt $s_r = s_0$ ikke existerer, dog kan betegnes ved $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = 0$, som giver $A_0 = (n, 0) = 1$. Altsaa er $\underline{0} = 1$. Ligeledes er $\underline{1} = 1$, idet $r = 1$ kun giver den ene Sats $s_1 = s_r = 1$, eller: $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0, \ldots$.

Da Satserne ikke forandres, og deres Antal $\underline{r}$ altsaa heller ikke forandres, naar Elementernes Antal forøges med $s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots$, idet Værdien af disse sidste Elementer maa være $= 0$, angiver derfor det over Funktionstegnet $_$ anførte Tal r ikke Elementernes Antal, men deres Sum. Betingelserne (4), der tilfredsstilles ved de $\underline{r}$ Satser, kunde ogsaa mere almindelig skrives saaledes:

$$\left.\begin{array}{c} s_1 + s_2 + \ldots + s_r + s_{r+1} + \ldots + s_{r+p} = r \\ r \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_r \geqq s_{r+1} \geqq \ldots \geqq s_{r+p} \end{array}\right\} \tag{4'}$$

idet p er vilkaarlig.

Naar Satserne ere dannede, faas af dem de tilsvarende $\underline{r}$ Kombinationer af de r Potensexponenter $(s_1 - s_2)$, $(s_2 - s_3)$, ... $(s_{r-1} - s_r)$ og $(s_r - s_{r+1}) = s_r$ til $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ og a_r.

I denne Tabel (se S. 70) vilde som foran anført alle de tomme Pladser kunne udfyldes med Nuller, altsaa ved for ethvert r til enhver af Satserne at føje: $s_{r+1} = s_{r+2} = s_{r+3} = \ldots = 0$.

§ 5. *Satsernes Antal.* Ved Dannelsen af omstaaende Tavle, der med Lethed fortsættes, saa langt som der nogensinde i Praxis kan blive Tale om at faa Brug for den, er man meget vel garderet imod Fejltagelser ved den *enkelte* Sats, da enhver Sats, der opfylder den Betingelse, at ethvert Element s ikke er større end det nærmest foregaaende, og at Summen af Elementerne er $= r$, vil være rigtig. Ligeledes skal ved den af enhver Sats dannede Kombination af Potensexponenter disses Sum være $= s_1$.

En Gjentagelse af den samme Sats er ved lidt Agtpaagivenhed, og naar man følger den foran antydede Plan i Dannelsen af Tabellen, heller ikke let tænkelig. Derimod ere Fejltagelser mulige derved, at man overspringer en eller flere Satser, og imod saadanne Fejltagelser kan man kun sikre sig ved for enhver af de Værdier af r, der skulle anvendes, at kjende Antallet $\underline{r}$ af de Satser, som tilfredsstille Betingelserne (4).

For at finde dette Antal bliver det nødvendigt at indføre en ny Betegnelse. For enhver Værdi af r falde Satserne i r Grupper, hver især bestaaende af de Satser, som erholdes for en af Værdierne r, $(r - 1)$, ... 2, 1 af det første Element s_1. Ved $r = 6$ indeholder saaledes den Gruppe, i hvilken $s_1 = 3$, 3 Satser, den Gruppe, i hvilken $s_1 = 4$, 2 Satser; de 3 »sidste« Grupper, i hvilke s_1 har Værdierne 3, 2 og 1, indeholde $3 + 3 + 1 = 7$ Satser; de 6 »sidste« Grupper, ɔ: samtlige Grupper for $r = 6$, indeholde 11 Satser. *Idet vi altsaa ved den »sidste« Gruppe forstaa den, for hvilken* $s_1 = 1$, *ved den »første« Gruppe den, for hvilken* $s_1 = r$, *ville vi ved* $\underline{r}_s$ *betegne det Antal af Satser, som indeholdes i de* s *sidste Grupper, eller — hvad der er det samme — det Antal af Satser, som er-*

Tabel over Satser og Potensexponenter,

for $\mathfrak{r} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

$\mathfrak{r}$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	....	Potensexponenten til							
									a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	....
0																
1	1								1							
2	2	0							2	0						
	1	1							0	1						
3	3	0	0						3	0	0					
	2	1	0						1	1	0					
	1	1	1						0	0	1					
4	4	0	0	0					4	0	0	0				
	3	1	0	0					2	1	0	0				
	2	2	0	0					0	2	0	0				
	2	1	1	0					1	0	1	0				
	1	1	1	1					0	0	0	1				
5	5	0	0	0	0				5	0	0	0	0			
	4	1	0	0	0				3	1	0	0	0			
	3	2	0	0	0				1	2	0	0	0			
	3	1	1	0	0				2	0	1	0	0			
	2	2	1	0	0				0	1	1	0	0			
	2	1	1	1	0				1	0	0	1	0			
	1	1	1	1	1				0	0	0	0	1			
6	6	0	0	0	0	0			6	0	0	0	0	0		
	5	1	0	0	0	0			4	1	0	0	0	0		
	4	2	0	0	0	0			2	2	0	0	0	0		
	4	1	1	0	0	0			3	0	1	0	0	0		
	3	3	0	0	0	0			0	3	0	0	0	0		
	3	2	1	0	0	0			1	1	1	0	0	0		
	3	1	1	1	0	0			2	0	0	1	0	0		
	2	2	2	0	0	0			0	0	2	0	0	0		
	2	2	1	1	0	0			0	1	0	1	0	0		
	2	1	1	1	1	0			1	0	0	0	1	0		
	1	1	1	1	1	1			0	0	0	0	0	1		
7	7	0	0	0	0	0	0		7	0	0	0	0	0	0	
	6	1	0	0	0	0	0		5	1	0	0	0	0	0	
	5	2	0	0	0	0	0		3	2	0	0	0	0	0	
	5	1	1	0	0	0	0		4	0	1	0	0	0	0	
	4	3	0	0	0	0	0		1	3	0	0	0	0	0	
	4	2	1	0	0	0	0		2	1	1	0	0	0	0	
	4	1	1	1	0	0	0		3	0	0	1	0	0	0	
	3	3	1	0	0	0	0		0	2	1	0	0	0	0	
	3	2	2	0	0	0	0		1	0	2	0	0	0	0	
	3	2	1	1	0	0	0		1	1	0	1	0	0	0	
	3	1	1	1	1	0	0		2	0	0	0	1	0	0	
	2	2	2	1	0	0	0		0	0	1	1	0	0	0	
	2	2	1	1	1	0	0		0	1	0	0	1	0	0	
	2	1	1	1	1	1	0		1	0	0	0	0	1	0	
	1	1	1	1	1	1	1		0	0	0	0	0	0	1	

holdes ved, at det første Element $\mathfrak{s}_1$ i (4)', gjennemløber alle Værdierne fra $\mathfrak{s}$ nedefter, nemlig $\mathfrak{s}$, $(\mathfrak{s}-1)$, $(\mathfrak{s}-2), \ldots 2, 1$.

Heraf følger da, at

$$\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}=\mathfrak{r}} = \underline{\mathfrak{r}}.$$

Enhver Værdi af $\mathfrak{s}_1$, som er $> \mathfrak{r}$, eller < 1, kan ifølge (4)' ikke give nogen Sats. Derfor er

$$\left.\begin{array}{ll} & \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s} \geqq \mathfrak{r}} = \underline{\mathfrak{r}}, \\ \text{og} & \underline{\mathfrak{r}}_0 = \underline{\mathfrak{r}}_{-1} = \underline{\mathfrak{r}}_{-2} = \ldots = \underline{\mathfrak{r}}_{-\mathfrak{s}} = 0, \\ \text{ligesom ogsaa} & \underline{-1}_{\mathfrak{s}} = \underline{-2}_{\mathfrak{s}} = \ldots = \underline{-\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} = 0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Dog er

$$\left.\begin{array}{ll} & \underline{0}_{\mathfrak{p}} = \underline{0}_0 = \underline{0} = 1, \\ \text{ligesom} & \underline{1}_{\mathfrak{s} \geqq 1} = \underline{1} = 1, \\ \text{og} & \underline{\mathfrak{r}}_1 = 1. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Ifølge Definitionen paa $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}}$ vil $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} - \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-1}$ være det Antal af Satser, som indeholdes i den $\mathfrak{s}$'te Gruppe fra neden, for hvilken $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}$. Dette Antal maa aabenbart være lig det Antal af Satser, som de andre Elementer $\mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \ldots \mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}$, hvis Antal $(\mathfrak{r}-1)$ ikke kan være mindre end deres Sum $(\mathfrak{r}-\mathfrak{s})$, kunne danne, altsaa, naar $\mathfrak{s}'_2$ er den største Værdi af $\mathfrak{s}_2$, være $= \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}'_2}$. I disse Satser kan $\mathfrak{s}_2$, der jo ifølge (4)' er $\leqq \mathfrak{s}_1$, ikke have nogen større Værdi end $\mathfrak{s}$, ligesom $\mathfrak{s}_2$ heller ikke kan have nogen større Værdi end $(\mathfrak{r}-\mathfrak{s})$. Satsernes Antal vil derfor være $\underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}}$, naar $\mathfrak{s}$ er $< (\mathfrak{r}-\mathfrak{s})$, og $\underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}} = \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}$, naar $\mathfrak{s}$ er $\geqq (\mathfrak{r}-\mathfrak{s})$; men i det sidste Tilfælde vil, ifølge den første (6), $\underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}$ være $= \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}}$, saa at man altid har

$$\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} = \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-1} + \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}} \qquad (8)$$

som Fundamentalligning for Funktionen $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}}$ og dermed ogsaa for Funktionen $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}+\mathfrak{p}} = \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}} = \underline{\mathfrak{r}}$.

Fundamentalligningen (8) er i Forbindelse med den 2den og den 1ste (6), hvilken sidste er bleven benyttet til Dannelsen af

(8), fuldstændig tilstrækkelig til Bestemmelsen af $\underline{r}_s$ og $\underline{r}$. Den sidste Relation (6) saavelsom (7) vil derfor ogsaa kunne udledes af (8) i Forbindelse med de 2 første (6), og det er kun for Oversigtens Skyld, og fordi de tildels maa siges at være umiddelbart indlysende, at de ere opførte samlede forud for (8). Sættes saaledes i (8) $s = (r + p + 1)$, faas den sidste (6). Sættes derpaa i (8) $r = 0$ og $s \geqq 1$, faas den 1ste (7). Sættes derefter i (8) $r = 1$ og $s = 2 + p$, faas den 2den (7). Sættes endelig i (8) $s = 1$, faas $\underline{r}_1 = \underline{r-1}_1 = \underline{r-2}_1 = \ldots = \underline{0}_1 = \underline{0} = 1$, som er den 3die Relation (7).

r	s	$r-s$	$\underline{r-s}_s$	$\underline{r}_s = \underline{r}_{s-1} + \underline{r-s}_s$
0	0	0	1	$1 = \underline{0}$
1	1	0	1	$1 = \underline{1}$
2	1	1	1	1
	2	0	1	$2 = \underline{2}$
3	1	2	1	1
	2	1	1	2
	3	0	1	$3 = \underline{3}$
4	1	3	1	1
	2	2	2	3
	3	1	1	4
	4	0	1	$5 = \underline{4}$
5	1	4	1	1
	2	3	2	3
	3	2	2	5
	4	1	1	6
	5	0	1	$7 = \underline{5}$
6	1	5	1	1
	2	4	3	4
	3	3	3	7
	4	2	2	9
	5	1	1	10
	6	0	1	$11 = \underline{6}$
7	1	6	1	1
	2	5	3	4
	3	4	4	8
	4	3	3	11
	5	2	2	13
	6	1	1	14
	7	0	1	$15 = \underline{7}$

Ved i (8) at sætte efterhaanden $r = 1, 2, 3, \ldots$ og ved for hver af disse Værdier af r at sætte $s = 1, 2, 3, \ldots r$ danner man nu let en Tavle over Værdierne af $\underline{r}_s$ og $\underline{r}_r = \underline{r}$.

Denne Tavle kan med Lethed fortsættes saa langt, som Anvendelserne kræve det. Den giver altsaa ikke blot det til enhver Værdi af r svarende hele Antal $\underline{r}$ af Satser, men ogsaa Antallet $(\underline{r}_s - \underline{r}_{s-1}) = \underline{r-s}_s$ af Satser i den Gruppe, for hvilken det første Element s_1 er $= s$. Vil man f. Ex. vide, hvor mange Satser der for $r = 7$ findes i den 4de Gruppe fra neden (den, for hvilken $s_1 = 4$), da kan dette Antal enten erholdes af den sidste Kolonne ved $\underline{7}_4 - \underline{7}_3 = 11 - 8 = 3$,

eller udtages umiddelbart af den næstsidste Kolonne som $\underline{7-4}_4 = \underline{3}_4 - 3$, som, sammenholdt med Tabellen over Satserne og Potensexponenterne, viser, at der i denne Gruppe af Tavlen findes det rigtige Antal af Satser.

I hvor vel denne Fremgangsmaade til Beregningen af $\underline{r}$ og $\underline{r}_s$ er særdeles simpel og for Anvendelserne fuldstændig tilstrækkelig, saa kan det dog have sin Interesse at udlede Formler, der selv for store Værdier af r, større end dem, der i Praxis vil blive Brug for, hurtig føre til Bestemmelsen af saavel $\underline{r}_s$ som især $\underline{r}$.

Der skal da først udvikles Formler, ved hvilke $\underline{r}_s$ udtrykkes ved Størrelser af Formen $\underline{p}$, idet $p \leqq r$, dernæst, idet der for $\underline{p}_2$ og $\underline{p}_3$ vil kunne findes meget simple Udtryk, Formler, ved hvilke $\underline{r}_s$ udtrykkes ved Størrelser af Formen $\underline{p}_3$ og $\underline{p}_2$, i hvilke ligeledes $p \leqq r$. Fra disse Formler vil dernæst Overgangen blive gjort til Beregningen af $\underline{r}$ ved Hjælp af $\underline{r-1}$, $\underline{r-2}$, ... Det vil for Forstaaelsen af disse Formler være nødvendigt, at Formlerne (7) saa vel som især den 1ste og 3die Formel (6) haves i Erindring.

Af Fundamentalligningen (8) faas, ved efterhaanden at forandre s til $(s+1)$, $(s+2)$, ... $(s+q)$

$$\underline{r}_s = \underline{r}_{s+1} - \underline{r-s-1}_{s+1}$$
$$\underline{r}_{s+1} = \underline{r}_{s+2} - \underline{r-s-2}_{s+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\underline{r}_{s+q} = \underline{r}_{s+1+q} - \underline{r-s-1-q}_{s+1+q},$$

hvori den sidste Ligning for $(s+1+q) = r$ antager Formen:

$$\underline{r}_{r-1} = \underline{r} - \underline{0} = \underline{r} - 1.$$

Addition af Ligningerne giver derfor

$$\underline{r}_s = \underline{r} - \sum_{q=0}^{q=r-s-1} \underline{r-s-1-q}_{s+1+q} = \underline{r} - \sum_{p=0}^{p=r-s-1} \underline{p}_{r-p}. \quad (9)$$

Heri vil $\underline{p}_{r-p}$ være $= \underline{p}$, naar $(r-p) \geqq p$, $p \leqq \frac{r}{2}$, $(r-s-1) \leqq \frac{r}{2}$, $s \geqq \frac{r}{2} - 1$, altsaa faas

$$\left.\begin{aligned} &\underline{r}_s = \underline{r} - \sum_{p=0}^{p=r-1-s} \underline{p}, \text{ for } s \geqq \left(\frac{r}{2}-1\right), \\ &\text{eller } \underline{r}_{r-q} = \underline{r} - \sum_{p=0}^{p=q-1} \underline{p}, \text{ for } q \leqq \left(\frac{r}{2}+1\right), \\ &\qquad\qquad \text{eller } r \geqq 2\,(q-1). \end{aligned}\right\} \quad (9)'$$

Af den sidste (9)' erholdes saaledes ved Hjælp af de givne Størrelser $\underline{0} = 1$, $\underline{1} = 1$, $\underline{2} = 2$, $\underline{3} = 3, \ldots$ Formlerne:

$$\begin{aligned} \underline{r}_{r-1} &= \underline{r} - 1, \text{ for } r \geqq 0, \\ \underline{r}_{r-2} &= \underline{r} - 2, \text{ — } r \geqq 2, \\ \underline{r}_{r-3} &= \underline{r} - 4, \text{ — } r \geqq 4, \\ \underline{r}_{r-4} &= \underline{r} - 7, \text{ — } r \geqq 6. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Naar $s < \left(\frac{r}{2} - 1\right)$, maa en gjentagen Anvendelse af Formlen (9) finde Sted først for det af Leddene under Σ-Tegnet i (9), for hvilket $p = (r - s - 1)$, dernæst om nødvendigt for det Led, for hvilket $p = (r - s - 2)$ o. s. v.

Ved store Værdier af r og forholdsvis meget smaa Værdier af s vil det dog kunne blive fordelagtigere at udtrykke $\underline{r}_s$ ved Størrelser af Formen $\underline{p}_{s-1}$, idet $p \leqq r$. En fortsat Reduktion med Hensyn til s vil da føre til Formen $\underline{p}_3$ eller $\underline{p}_2$, for hvilke der findes et simpelt Udtryk.

Af Fundamentalligningen (8) faas

$$\begin{aligned} \underline{r}_s &= \underline{r}_{s-1} + \underline{r-s}_s \\ \underline{r-s}_s &= \underline{r-s}_{s-1} + \underline{r-2s}_s \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{r-qs}_s &= \underline{r-qs}_{s-1} + \underline{r-(q+1)s}_s, \end{aligned}$$

hvilke Ligninger, ved at fortsættes, indtil $r < (q+1)\,s$, eller $q > \left(\frac{r}{s} - 1\right)$, ved Addition give:

$$\underline{r}_s = \sum_{q=0} \underline{r-qs}_{s-1} = \underline{r}_{s-1} + \underline{r-s}_{s-1} + \underline{r-2s}_{s-1} + \ldots, \quad (10)$$

i hvilken Formel den højere Grænse ikke er tilføjet, fordi den er

unødvendig, idet Rækken fortsættes, indtil Leddene forsvinde derved, at $(\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{s})$ bliver negativ.

Af (10) faas nu en simpel Formel for $\underline{\mathfrak{r}}_2$, idet

$$\underline{2\mathfrak{p}}_2 = \sum_{\mathfrak{q}=0}^{\mathfrak{q}=\mathfrak{p}} \underline{2\mathfrak{p} - 2\mathfrak{q}}_1 = \mathfrak{p} + 1$$

og
$$\underline{2\mathfrak{p}+1}_2 = \sum_{\mathfrak{q}=0}^{\mathfrak{q}=\mathfrak{p}} \underline{2\mathfrak{p} + 1 - 2\mathfrak{q}}_1 = \mathfrak{p} + 1, \text{ altsaa}$$

$$\underline{2\mathfrak{p}+1}_2 = \underline{2\mathfrak{p}}_2 = \mathfrak{p} + 1. \tag{11}$$

Ogsaa for $\underline{\mathfrak{r}}_3$ vil der af (10) i Forbindelse med (11) kunne findes et simpelt Udtryk, idet man finder, resp. for $\mathfrak{r}$ lige eller ulige:

$$\left.\begin{aligned}
&\underline{\mathfrak{r}}_3 = \frac{\mathfrak{q}+1}{2}(\mathfrak{r}+1-3\mathfrak{q}) + \frac{\mathfrak{s}+1}{2}(\mathfrak{r}-1-3\mathfrak{s}),\\
\text{og}\quad &\underline{\mathfrak{r}}_3 = \frac{\mathfrak{q}+1}{2}(\mathfrak{r}+2-3\mathfrak{q}) + \frac{\mathfrak{s}+1}{2}(\mathfrak{r}-2-3\mathfrak{s}),\\
&\text{i hvilke Formler}\\
&\qquad \mathfrak{q} \text{ er nærmest } \leqq \frac{\mathfrak{r}}{6},\\
&\qquad \text{og } \mathfrak{s} \text{ - } \quad \text{—} \quad \leqq \frac{\mathfrak{r}-3}{6}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Formler for $\underline{\mathfrak{r}}_4$, $\underline{\mathfrak{r}}_5$, ..., udledte af (10), vilde blive meget komplicerede; men ved givne numeriske Værdier af $\mathfrak{r}$ og $\mathfrak{s}$ kan $\underline{\mathfrak{r}}_\mathfrak{s}$ altid bestemmes ved gjentagen Anvendelse af (10). Naar $\mathfrak{s} \geqq \left(\frac{\mathfrak{r}}{2} - 1\right)$, anvendes dog bedst Formel (9)′, for saa vidt $\underline{\mathfrak{r}}$, og $\underline{\mathfrak{r}-1-\mathfrak{s}}$, $\underline{\mathfrak{r}-2-\mathfrak{s}}$, ... ere bekjendte.

Vi gaa derefter over til Fremstillingen af en Formel, der i Forbindelse med (9), (10), (11) og (12) kan anvendes til en hurtig Beregning af $\underline{\mathfrak{r}}$.

Fundamentalligningen (8) giver

$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{r}}_\mathfrak{s} &= \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-1} + \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_\mathfrak{s}\\
\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-1} &= \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-2} + \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}+1}_{\mathfrak{s}-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-\mathfrak{p}} &= \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-\mathfrak{p}-1} + \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}+\mathfrak{p}}_{\mathfrak{s}-\mathfrak{p}},
\end{aligned}$$

hvilke Ligninger, ved at fortsættes, indtil $(\mathfrak{s} - \mathfrak{p} - 1) = 0$, ved Addition give:

$$\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} = \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{s}-1} \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}+\mathfrak{p}}_{\mathfrak{s}-\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{q}=0}^{\mathfrak{q}=\mathfrak{s}-1} \underline{\mathfrak{r}-1-\mathfrak{q}}_{1+\mathfrak{q}}$$

$$= 1 + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{s}-2} \underline{\mathfrak{r}-2-\mathfrak{p}}_{2+\mathfrak{p}}$$

$$\underline{\mathfrak{r}+1}_{\mathfrak{s}} = 1 + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{s}-2} \underline{\mathfrak{r}-1-\mathfrak{p}}_{2+\mathfrak{p}}$$

$$= 1 + \underline{\mathfrak{r}-1}_{2} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{s}-3} \underline{\mathfrak{r}-2-\mathfrak{p}}_{3+\mathfrak{p}}$$

$$\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} = 1 + \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{s}-3} \underline{\mathfrak{r}-2-\mathfrak{p}}_{2+\mathfrak{p}}.$$

Subtraheres den sidste Ligning fra den næstsidste, faas, ifølge Formlen: $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} - \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-1} = \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}}$,

$$\underline{\mathfrak{r}+1}_{\mathfrak{s}} - \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} = \underline{\mathfrak{r}-1}_{2} - \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{s}-3} \underline{\mathfrak{r}-5-2\mathfrak{p}}_{3+\mathfrak{p}},$$

som for $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}$ giver, ifølge den 1ste (9)':

$$\underline{\mathfrak{r}+1}_{\mathfrak{r}} - \underline{\mathfrak{r}} = \underline{\mathfrak{r}+1} - \underline{\mathfrak{r}} - 1$$

$$= \underline{\mathfrak{r}-1}_{2} - 1 + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-3} \underline{\mathfrak{r}-5-2\mathfrak{p}}_{3+\mathfrak{p}}. \qquad (13)$$

Indføres nu den forkortede Betegnelse:

$$\underline{\mathfrak{r}+1} - \underline{\mathfrak{r}} = \Delta\,\underline{\mathfrak{r}},$$

haves altsaa:

$$\Delta\,\underline{\mathfrak{r}} = \underline{\mathfrak{r}-1}_{2} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-3} \underline{\mathfrak{r}-5-2\mathfrak{p}}_{3+\mathfrak{p}}$$

$$\Delta\,\underline{\mathfrak{r}+2} = \underline{\mathfrak{r}+1}_{2} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-1} \underline{\mathfrak{r}-3-2\mathfrak{p}}_{3+\mathfrak{p}}$$

$$= \underline{\mathfrak{r}+1}_{2} + \underline{\mathfrak{r}-3}_{3} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-2} \underline{\mathfrak{r}-5-2\mathfrak{p}}_{4+\mathfrak{p}}$$

$$\Delta\,\underline{\mathfrak{r}+2} = \underline{\mathfrak{r}+1}_{2} + \underline{\mathfrak{r}-3}_{3} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-3} \underline{\mathfrak{r}-5-2\mathfrak{p}}_{4+\mathfrak{p}},$$

hvoraf man, idet $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}} - \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}-1} = \underline{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}}_{\mathfrak{s}}$, og $\underline{\mathfrak{r}+1}_{2} = 1 + \underline{\mathfrak{r}-1}_{2}$, faar:

$$\Delta\,\underline{\mathfrak{r}+2} - \Delta\,\underline{\mathfrak{r}} = 1 + \underline{\mathfrak{r}-3}_{3} + \sum_{\mathfrak{p}=0}^{\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-3} \underline{\mathfrak{r}-9-3\mathfrak{p}}_{4+\mathfrak{p}}.$$

Heri ville Leddene under Σ forsvinde, naar $\mathfrak{p}$ bliver $> \left(\frac{\mathfrak{r}}{3} - 3\right)$. Idet altsaa Rækken fortsættes, indtil Leddene forsvinde, kan den højere Grænse for $\mathfrak{p}$ udelades. Ved i Stedet for $\mathfrak{r}$ at sætte $(\mathfrak{r} - 2)$ erholder man da

$$\underline{\mathfrak{r}+1} - \underline{\mathfrak{r}} = \Delta\underline{\mathfrak{r}} = \Delta\underline{\mathfrak{r}-2} + 1 + \underline{\mathfrak{r}-5}_3 + \sum_{\mathfrak{p}=0} \underline{\mathfrak{r}-11-3\mathfrak{p}}_{4+\mathfrak{p}} \quad . \quad (14)$$

Formlen (14) er gjældende for alle Værdier af $\mathfrak{r} \geqq 2$. Man behøver altsaa kun at kjende $\underline{0}$, $\Delta\underline{0}$ og $\Delta\underline{1}$, eller $\underline{0} = 1$, $\underline{1} = 1$ og $\underline{2} = 2$, som give $\Delta\underline{0} = 0$ og $\Delta\underline{1} = 1$, for deraf efterhaanden ved Hjælp af (14) og Hjælpeformlerne (9), (10) og (11) at kunne beregne alle Værdier af $\underline{\mathfrak{r}}$.

Ved de mindre Værdier af $\mathfrak{r}$ simplificeres Formlen (14) betydelig. Størrelserne under Σ-Tegnet forsvinde for $\mathfrak{r} \leqq 10$, og reduceres til 1 for $\mathfrak{r} = 11$ og $\mathfrak{r} = 12$. Naar $(\mathfrak{r} - 11) \leqq 4$, ɔ: naar $\mathfrak{r} \leqq 15$, ville Størrelserne under Σ være af Formen $\underline{\mathfrak{r} - 11 - 3\mathfrak{p}}$; for $\mathfrak{r} = 15$ bliver denne Sum nemlig $= \underline{4} + \underline{1}$. Naar $\mathfrak{r} \geqq 16$, vil der under Σ begynde at fremkomme først 1. senere flere Størrelser, der maa reduceres ved Hjælp af Formlerne (9) eller (9)' og (10); men endnu lige indtil $\mathfrak{r} = 21$, hvorved $\Delta\underline{21}$ og $\underline{22}$ bestemmes, bliver der af disse Hjælpeformler ikkun Brug for (9)', som strax giver Udtrykket ved Størrelser af Formen $\underline{q}$, idet $q \leqq (\mathfrak{r} - 11)$. Det er imidlertid let af (14) at danne en Formel med endnu stærkere aftagende Led.

Sættes nemlig i (14) $(\mathfrak{r} - 3)$ i Stedet for $\mathfrak{r}$, og subtraheres den saaledes dannede Ligning fra (14), faas ved Anvendelse af Formlen $\underline{\mathfrak{r}}_s - \underline{\mathfrak{r}}_{s-1} = \underline{\mathfrak{r} - s}_s$ følgende Formel:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\mathfrak{r}+1} - \underline{\mathfrak{r}} = \\ &\Delta\underline{\mathfrak{r}} = \Delta\underline{\mathfrak{r}-2} + \Delta\underline{\mathfrak{r}-3} - \Delta\underline{\mathfrak{r}-5} + \underline{\mathfrak{r}-5}_2 \\ &\qquad\qquad + \underline{\mathfrak{r}-11}_4 + \sum_{\mathfrak{p}=0} \underline{\mathfrak{r}-19-4\mathfrak{p}}_{5+\mathfrak{p}}\,, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

som er gjældende for $\mathfrak{r} \geqq 5$. Af denne Formel kan paa lignende Maade, ved at forandre $\mathfrak{r}$ til til $(\mathfrak{r} - 4)$, en ny udledes, der er stærkere aftagende, og saaledes vilde Udviklingen kunne fortsættes i det uendelige; men der vindes ikke noget væsentligt ved at

gaa videre i Udviklingen end til (15). I (15) maa $\underline{r-11}_4$, naar $r \geqq 22$, helst beregnes ved (10). Derimod kan der først, naar $r \geqq 32$, blive Brug for denne Formel til Beregningen af $\underline{r-19}_5$. Ved $r \geqq 38$, $r \geqq 44, \ldots$ kunne endnu henholdsvis $\underline{r-23}_6$ $\underline{r-27}_7, \ldots$ beregnes ved (10); men det maa ved saa store Værdier af r vistnok foretrækkes at fortsætte Tavlen over $\underline{r}_6$ indtil $(r-23)$ for r og indtil 6 for s, eller indtil $(r-27)$ for r og 7 for s o. s. v.

Ved fra $r = 2$ til $r = 4$ at anvende (14), altsaa $\Delta \underline{r} = \Delta \underline{r-2} + 1$, og derpaa fra $r = 5$ Formlen (15), dannes hosstaaende Tavle over $\underline{r}$. Først med Anvendelsen af (10), altsaa fra $r = 22$, begynder Beregningen at blive mindre let. For $r = 27$ vil Beregningen saaledes blive:

r	$\underline{r}$	$\Delta \underline{r}$
0	1	0
1	1	1
2	2	1
3	3	2
4	5	2
5	7	4
6	11	4
7	15	7
8	22	8
9	30	12
10	42	14
11	56	21
12	77	24
13	101	34
14	135	41
15	176	55
16	231	66
17	297	88
18	385	105
19	490	137
20	627	165
21	792	210
22	1002	253
23	1255	320
24	1575	383
25	1958	458
26	2416	574
27	2990	688
28	3678	827
29	4505	1019
30	5524	1218
31	6742	1466
32	8208	1774
33	9982	2126
34	12108	

$$\Delta \underline{27} = 458 + 383 - 253 + \underline{22}_2 + \underline{16}_4 + (\underline{8}_5 + \underline{4} + \underline{0}),$$

hvori $\underline{22}_2$ beregnes efter (11), altsaa $\underline{22}_2 = 12$, og $\underline{8}_5$ beregnes efter (9), altsaa

$$\underline{8}_5 = \underline{8} - (\underline{0} + \underline{1} + \underline{2}) = 22 - 4 = 18,$$

medens $\underline{16}_4$ maa beregnes af (10), som giver:

$$\underline{16}_4 = \underline{16}_3 + \underline{12}_3 + \underline{8}_3 + \underline{4}_3 + 1,$$ hvori ifølge den 2den (12):

$\underline{16}_3 = 30,$

$\underline{12}_3 = 19,$

$\underline{8}_3 = 10$ og

$\underline{4}_3 = 4$, altsaa

$\underline{16}_4 = 64$

$\Delta \underline{27} = 688$

$\underline{27} = 2990$

$\underline{28} = 3678$

Beregningen er i Virkeligheden lettere, idet man ved den forud gaaende Beregning af

$\triangle\ \underline{23}$ har beregnet $\underline{12}_4$, saa at det i $\triangle\ \underline{27}$ forekommende $\underline{16}_4 = \underline{16}_3 - \underline{12}_4$ kun kræver Beregningen ifølge (12) af $\underline{16}_3$.

Anvendelsen af Formlen (10) kunde i øvrigt, som foran bemærket, undgaas ved at fortsætte Tavlen S. 72 over Værdierne af $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}}$, idet man indskrænker sig til at medtage de Værdier af $\mathfrak{s}$, hvorfor der vil kunne blive Brug i (15), til Bestemmelsen af $\underline{\mathfrak{r}-11}_4$, $\underline{\mathfrak{r}-19}_5$, $\underline{\mathfrak{r}-23}_6$, ..., og dette vil maaske vise sig at være det simpleste, naar man skal bestemme en Række af Værdier af $\underline{\mathfrak{r}}$ eller af $\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{s}}$.

§ 6. Overgangen fra y^n til $y^{n'}$ eller til $y^{\mathfrak{n}}$. Naar man har beregnet

$$y^n = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_{\mathfrak{r}}^{(n)} x^{\mathfrak{r}}, \text{ idet } A_{\mathfrak{r}}^{(n)} = \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}} (n, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}},$$

og dernæst skal beregne

$$y^{n'} = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_{\mathfrak{r}}^{(n')} x^{\mathfrak{r}}, \text{ idet } A_{\mathfrak{r}}^{(n')} = \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}} (n', \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}},$$

da vil dette kunne udføres paa en forholdsvis let Maade ved at beregne $(n', \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}}$ af $(n, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}}$. Formlen (3) giver nemlig

$$(n', \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}} = (n, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}} \cdot \frac{\{n - \mathfrak{s}_1\}}{\{n\}} \cdot \frac{\{n'\}}{\{n' - \mathfrak{s}_1\}}. \tag{16}$$

For alle Satser i samme Gruppe, ɔ: med den samme Værdi for $\mathfrak{s}_1$, vil Faktoren i (16) til $(n, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}}$ forblive uforandret.

Ved Overgangen fra y^n til $y^{\mathfrak{n}}$ kan Formlen (16) ligeledes benyttes med den Forandring, at $\mathfrak{n}$ træder i Stedet for n'; men det maa herved bemærkes, at $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}}$ bliver $= 0$ for enhver Værdi af $\mathfrak{s}_1$, som er $\geqq (\mathfrak{n} + 1)$, saa at Antallet af de ikke forsvindende Led $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}}$ i $A_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{n})}$ bliver $= \underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{n}}$, som er Antallet af de Satser, i hvilke $\mathfrak{s}_1 \leqq \mathfrak{n}$. (jvfr. §§ 8 og 9).

§ 7. Vi ville oplyse det foregaaende ved et Exempel, idet vi af Rækken:

$$\cos \xi = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} (-1)^{\mathfrak{r}} \frac{\xi^{2\mathfrak{r}}}{[2\mathfrak{r}]}$$

ville finde Rækken for $(cos\ \xi)^{-1}$ og af denne Række atter ifølge (16) udlede Rækken for $(cos\ \xi)^{-2}$.

Først sættes $\xi^2 = x$, hvorefter man skal bestemme

$$(cos\ \sqrt{x})^{-1} = y^{-1} = \left(\sum_{r=0}^{r=\infty} a_r x^r\right)^{-1} = \left(\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{[2r]} x^r\right)^{-1} = \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r\, x^r.$$

Ifølge (1)' bliver $\frac{\{n\}}{\{n - s_1\}} = \frac{\{-1\}}{\{-1-s_1\}} = (-1)^{s_1}[s_1]$; ligesom $\frac{\{-2\}}{\{-2-s_1\}} = (-1)^{s_1}[s_1 + 1]$,

saa at (3) giver:

$$(-1, r)_i = (-1)^{s_1}[s_1] \frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^{s_1 - s_2}}{[s_1 - s_2]} \cdot \frac{\left(\frac{+1}{[4]}\right)^{s_2 - s_3}}{[s_2 - s_3]} \cdots\cdots \frac{\left(\frac{(-1)^{r-1}}{[2r-2]}\right)^{s_{r-1} - s_r}}{[s_{r-1} - s_r]} \cdot \frac{\left(\frac{(-1)^r}{[2r]}\right)^{s_r}}{[s_r]} \quad \text{(i)}.$$

Ved Benyttelsen af Tabellen S. 70 over Satser og Potensexponenter og Formel (16), som giver $(-2, r)_i = (s_1 + 1) . (-1, r)_i$, finder man da Tabellen Side 81.

Ved Addition af de i denne Tavle for hver Værdi af r opførte $\underline{r}$ Værdier af $(-1, r)_i$ og $(-2, r)_i$ erholdes Koefficienten til x^r i Rækkeudviklingen for henholdsvis $(cos\ \sqrt{x})^{-1}$ og $(cos\ \sqrt{x})^{-2}$, eller ved i Stedet for x at sætte ξ^2 eller x^2, Koefficienten til x^{2r} i Rækkeudviklingen for henholdsvis $sec\ x$ og $sec^2\ x$.

Disse Rækkeudviklinger blive da:

$$sec\ x = 1 + \frac{1}{[2]}x^2 + \frac{5}{[4]}x^4 + \frac{61}{[6]}x^6 + \frac{1385}{[8]}x^8 + \frac{50521}{[10]}x^{10} + \ldots$$

$$sec^2\ x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \frac{62}{315}x^8 + \frac{1382}{14175}x^{10} + \ldots$$

Af den sidste Række faas ved Integration:

$$tg\ x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \ldots.$$

hvilken Række anføres her, fordi den vil blive benyttet som Kontrol for Regningen i et i § 20 anført Exempel.

r	$(-1, r)_i$		$(-2, r)_i = (s_1+1).(-1, r)_i$
1	$-[1]\frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^1}{[1]} = +\frac{1}{[2]}$	$= +\frac{1}{2}$	$+1$
2	$+[2]\frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^2}{[2]}.1 = +\frac{1}{[2]^2}$	$= +\frac{1}{2^2}$	$+\frac{3}{2^2}$
	$-[1].1.\frac{\left(\frac{+1}{[4]}\right)^1}{[1]} = -\frac{1}{[4]}$	$= -\frac{1}{2^3.3}$	$-\frac{1}{2^2.3}$
3	$-[3]\frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^3}{[3]}.1.1 = +\frac{1}{[2]^3}$	$= +\frac{1}{2^3}$	$+\frac{1}{2}$
	$+[2]\frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^1}{[1]}.\frac{\left(\frac{+1}{[4]}\right)^1}{[1]}.1 = -\frac{1}{[4]}$	$= -\frac{1}{2^3.3}$	$-\frac{1}{2^3}$
	$-[1].1.1.\frac{\left(\frac{-1}{[6]}\right)^1}{[1]} = +\frac{1}{[6]}$	$= +\frac{1}{2^4.3^2.5}$	$+\frac{1}{2^3.3^2.5}$
4	$+[4]\frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^4}{[4]}.1.1.1 = +\frac{1}{[2]^4}$	$= +\frac{1}{2^4}$	$+\frac{5}{2^4}$
	$-[3]\frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^2}{[2]}.\frac{\left(\frac{+1}{[4]}\right)^1}{[1]}.1.1 = -\frac{[3]}{[2]^3[4]}$	$= -\frac{1}{2^5}$	$-\frac{1}{2^3}$
	$+[2].1.\frac{\left(\frac{+1}{[4]}\right)^2}{[2]}.1.1 = +\frac{1}{[4]^2}$	$= +\frac{1}{2^6.3^2}$	$+\frac{1}{2^6.3}$
	$+[2]\frac{\left(\frac{-1}{[2]}\right)^1}{[1]}.1.\frac{\left(\frac{-1}{[6]}\right)^1}{[1]}.1 = +\frac{1}{[6]}$	$= +\frac{1}{2^4.3^2.5}$	$+\frac{1}{2^4.3.5}$
	$-[1].1.1.1.\frac{\left(\frac{+1}{[8]}\right)^1}{[1]} = -\frac{1}{[8]}$	$= -\frac{1}{2^7.3^2.5.7}$	$-\frac{1}{2^6.3^2.5.7}$
			o. s. v.

Det vil af det foran staaende Exempel ses, at Beregningen af y^n og $y^{n'}$ kan, bortset fra Regnefejl, ved sin symmetriske Anordning skride sikkert frem og i Reglen ikke blive meget besværlig, navnlig naar man, hvad der i Praxis næsten altid vil ske, foretager Beregningen af Værdierne af $(n, \mathfrak{r})_i$ ved Logarithmer og udtrykker dem i Decimaler, saa at deres Summation til $A_{\mathfrak{r}}^{(n)}$ let kan foretages.

b. Potensexponenten $n = \mathfrak{n}$, ɔ: positiv hel.

§ 8. I Formlen (3) træder $\mathfrak{n}$ i Stedet for n. Da $\frac{\{\mathfrak{n}\}}{\{\mathfrak{n} - \mathfrak{s}_1\}}$ er $= 0$ for $\mathfrak{s}_1 \geqq (\mathfrak{n} + 1)$, vil i de Værdier af $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i$, som ikke ere $= 0$, $\mathfrak{s}_1$ være $\leqq \mathfrak{n}$. Naar $\mathfrak{r} > \mathfrak{n}$, maa derfor i den 2den Betingelse (4) $\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{s}_1$ ombyttes med $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{s}_1$.

Tabellen over Satserne og Potensexponenterne dannes paa den i § 4 omtalte Maade, idet man for enhver Værdi af $\mathfrak{r}$ begynder med den største Værdi af $\mathfrak{s}$, som tilfredsstiller (4), altsaa, saalænge $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{n}$, med $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{r}$, og naar $\mathfrak{r} \geqq (\mathfrak{n} + 1)$, med $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{n}$.

Det til enhver Værdi af $\mathfrak{r}$ hørende Antal af Satser vil altsaa være lig

$$\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{n}},$$

der, naar $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{n}$, ifølge (6) vil være $= \underline{\mathfrak{r}}$.

Idet de Værdier af $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i$, der forsvinde, ikke medregnes i disses Antal, bliver altsaa Formlen (5) forandret til

$$A_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{n})} = \sum_{i=1}^{i=\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{n}}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i. \tag{17}$$

§ 9. Overgangen fra $y^{\mathfrak{n}}$ til y^n eller til $y^{\mathfrak{n}'}$ udføres, som i § 6 omtalt, ved Hjælp af Formlerne

$$\left.\begin{aligned} (n, \mathfrak{r})_i &= (\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i \frac{\{\mathfrak{n} - \mathfrak{s}_1\}}{\{\mathfrak{n}\}} \cdot \frac{\{n\}}{\{n - \mathfrak{s}_1\}}, \\ &\text{eller} \\ (\mathfrak{n}', \mathfrak{r})_i &= (\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i \frac{\{\mathfrak{n} - \mathfrak{s}_1\}}{\{\mathfrak{n}\}} \cdot \frac{\{\mathfrak{n}'\}}{\{\mathfrak{n}' - \mathfrak{s}_1\}}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

men i disse Formler vil $\mathfrak{s}_1$ ikke kunne have nogen Værdi, der er $> \mathfrak{n}$, saa at den 1ste Formel (18) ikkun vil kunne tjene til Dannelsen af de første $(\mathfrak{n}+1)$ Led, indeholdende $x^0, x^1, x^2, \ldots x^{\mathfrak{n}}$, af y^n; medens derimod den 2den Formel vil, naar $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}'$, være brugelig til Dannelsen af alle Led i $y^{\mathfrak{n}'}$ men, naar $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$, ligeledes ikkun til Dannelsen af de første $(\mathfrak{n}+1)$ Led i $y^{\mathfrak{n}'}$. Naar $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}'$, og (18) altsaa kan bruges til den fuldstændige Dannelse af $y^{\mathfrak{n}'}$, vil $(\mathfrak{n}', \mathfrak{r})_i$ være $= 0$ for alle Værdier af $\mathfrak{s}_1$, som ere $\geqq (\mathfrak{n}'+1)$.

I. B. Potenser af endelige Rækker ($\mathfrak{t}$ endelig).

§ 10. Et Polynomium

$$\eta = p_0 + p_1 + \cdots + p_\mathfrak{r} + \cdots + p_\mathfrak{t},$$

bestaaende af $(\mathfrak{t}+1)$ Led, ordnes, naar η^n skal beregnes, først saaledes, at i numerisk Henseende:

$$p_0 > p_1 > \cdots > p_\mathfrak{t}.$$

Derefter sættes $\frac{p_\mathfrak{r}}{p_0} = a_\mathfrak{r} x^\mathfrak{r}$, og man har da $\eta^n = p_0^n \cdot y^n$, idet y^n har den i Formel (2) angivne Form.

Formlen (3) i § 4, der hviler paa Forudsætningen

$$\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \cdots + \mathfrak{s}_\mathfrak{r} = \mathfrak{r},$$

vil være gyldig, ikke blot for $\mathfrak{t} = \infty$ eller $\geqq \mathfrak{r}$, men ogsaa for $\mathfrak{t}$ endelig, ɔ: for

$$a_{\mathfrak{t}+1} = a_{\mathfrak{t}+2} = \ldots = 0,$$

naar man sætter

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{t}+1} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{t}+2} = \ldots = 0.$$

Derved vil den sidste fra Enheden forskjellige Faktor i (3) være: $\frac{a_\mathfrak{t}^{\mathfrak{s}_\mathfrak{t}}}{[\mathfrak{s}_\mathfrak{t}]}$, naar $\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{t}$, og $\frac{a_\mathfrak{r}^{\mathfrak{s}_\mathfrak{r}}}{[\mathfrak{s}_\mathfrak{r}]}$, naar $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{t}$.

a. Potensexponenten n ikke positiv hel.

§ 11. De $\mathfrak{t}$ Satselementer $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_\mathfrak{t}$ skulle tilfredsstille Betingelserne

$$\left.\begin{array}{l} s_1 + s_2 + \ldots + s_t = r \\ r \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_t \end{array}\right\} \qquad (19)$$

der, naar $r \leqq t$, ikke ville være forskjellige fra Betingelserne (4), saa at Tabellen over Satser og Potensexponenter vil for $r = 1, 2, \ldots t$ blive ganske den samme som den S. 70 for $t = \infty$, idet man for enhver Værdi af r efterhaanden kan give s_1 Værdierne r, $(r-1)$, $\ldots 2, 1$. For $r > t$ vil derimod Tabellen over Satserne blive forskjellig fra den S. 70 anførte ved den samme Værdi af r, idet de af den sidstnævnte Tabels Satser, i hvilke s_{t+1} ikke er $= 0$, maa falde bort. For $t = 3$ og $r = 7$ faas saaledes Satserne

r	s_1	s_2	s_3
7	7	0	0
	6	1	0
	5	2	0
	5	1	1
	4	3	0
	4	2	1
	3	3	1
	3	2	2

hvoraf de tilsvarende Rækker af Potensexponenter til a_1, a_2 og a_3 dannes.

Det hele til en given Værdi af r svarende Antal af Satser maa være en Funktion af r og t og betegnes ved $r_{\overline{t}}$. Derved forandres Formlen (5) til

$$A_r^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=r_{\overline{t}}} (n, r)_i. \qquad (20)$$

§ 12. Satsernes Antal $r_{\overline{t}}$. Da Betingelserne (19) fremstaa af Betingelserne (4) eller (4′) ved i disse at sætte $s_{t+1} = s_{t+2} = \ldots = s_r = s_{r+1} = \ldots = 0$, maa — som i § 11 bemærket — de Satser, der tilfredsstille (19), og hvis Antal betegnes ved $r_{\overline{t}}$, være de af Satserne, tilfredsstillende (4) og (4)′, i hvilke $s_{t+1} = s_{t+2} = \ldots = 0$. Ligeledes vil den Del af Satserne, tilfredsstillende (4) og (4)′, for hvilken $s_t = s_{t+1} = s_{t+2} = \ldots = 0$, være i Antal $r_{\overline{t-1}}$, altsaa vil $(r_{\overline{t}} - r_{\overline{t-1}})$ være Antallet af de af Satserne, tilfredsstillende (4) og (4)′, for hvilke

$$\mathfrak{s}_t = 1,\ \mathfrak{s}_{t+1} = 0,\ \mathfrak{s}_{t+2} = 0, \dots$$
$$\mathfrak{s}_t = 2,\ \mathfrak{s}_{t+1} = 0,\ \mathfrak{s}_{t+2} = 0, \dots$$
$$\mathfrak{s}_t = 3,\ \mathfrak{s}_{t+1} = 0,\ \mathfrak{s}_{t+2} = 0, \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

For enhver af disse Grupper, hvis samlede Satsantal er $(\underset{t\overline{\ }}{\mathfrak{r}} - \underset{t-1\overline{\ }}{\mathfrak{r}})$, maa Elementerne $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \dots \mathfrak{s}_{t-1}$ opfylde Betingelserne

$$(\mathfrak{s}_1 - 1) + (\mathfrak{s}_2 - 1) + \dots + (\mathfrak{s}_{t-1} - 1) = \mathfrak{r} - t$$
$$(\mathfrak{s}_1 - 2) + (\mathfrak{s}_2 - 2) + \dots + (\mathfrak{s}_{t-1} - 2) = \mathfrak{r} - 2t$$
$$(\mathfrak{s}_1 - 3) + (\mathfrak{s}_2 - 3) + \dots + (\mathfrak{s}_{t-1} - 3) = \mathfrak{r} - 3t$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

saa at Satsantallet for enhver af disse Grupper bliver henholdsvis $\underset{t-1\overline{\quad\quad}}{\mathfrak{r}-t}$, $\underset{t-1\overline{\quad\quad}}{\mathfrak{r}-2t}$, $\underset{t-1\overline{\quad\quad}}{\mathfrak{r}-3t}$, ... Følgelig haves

$$\underset{t\overline{\ }}{\mathfrak{r}} - \underset{t-1\overline{\ }}{\mathfrak{r}} = \underset{t-1\overline{\quad\quad}}{\mathfrak{r}-t} + \underset{t-1\overline{\quad\quad}}{\mathfrak{r}-2t} + \underset{t-1\overline{\quad\quad}}{\mathfrak{r}-3t} + \dots.$$

som, sammenholdt med Formlen (10), viser, at

$$\underset{t\overline{\ }}{\mathfrak{r}} = \underset{\overline{\ }t}{\mathfrak{r}}. \tag{21}$$

I Formlen (20) vilde altsaa den højere Grænse $\underset{t\overline{\ }}{\mathfrak{r}}$ for i kunne ombyttes med $\underset{\overline{\ }t}{\mathfrak{r}}$; men, medens der i numerisk Henseende ingen Forskjel er paa $\underset{t\overline{\ }}{\mathfrak{r}}$ og $\underset{\overline{\ }t}{\mathfrak{r}}$, saa maa det dog fastholdes, at $\underset{t\overline{\ }}{\mathfrak{r}}$ er Antallet af Satser, hvis Elementer, idet de tilfredsstille (19), ere i Antal t og have en Sum $= \mathfrak{r}$, medens $\underset{\overline{\ }t}{\mathfrak{r}}$ er Antallet af Satser, der tilfredsstille Betingelserne

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \dots + \mathfrak{s}_\mathfrak{r} + \dots = \mathfrak{r} \\ t \geqq \mathfrak{s}_1 \geqq \mathfrak{s}_2 \geqq \dots \geqq \mathfrak{s}_\mathfrak{r} \geqq \dots\dots. \end{array}\right\}$$

hvori Elementernes Sum vel ogsaa er $= \mathfrak{r}$; men deres Antal er $\geqq \mathfrak{r}$, og det første Element kan ikke have nogen større Værdi end t. $\underset{\overline{\ }t}{\mathfrak{r}}$ er Antallet af Satserne i de sidste t Grupper af de Satser i Tabellen S. 70, hvis Antal er $\underset{\overline{\ }\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}$, medens $\underset{t\overline{\ }}{\mathfrak{r}}$ er med enkelte Overspringninger Antallet af de første af disse Satser.

Ligesom $\underset{\overline{\ }\mathfrak{s}}{\mathfrak{r}}$ er Antallet af de af Satserne, tilfredsstillende (4) og (4)', i hvilke det første Element $\mathfrak{s}_1$ er $\leqq \mathfrak{s}$, saaledes ville vi

ved »den almindelige Satsfunktion $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{s}}$« betegne Antallet af de af Satserne, tilfredsstillende (19), i hvilke $\mathfrak{s}_1$ er $\leqq \mathfrak{s}$. Ligesom $\mathfrak{r}_{-}$ er en forkortet Betegnelse for $\mathfrak{r}_{-\mathfrak{r}}$, saaledes bliver altsaa $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-}$ en forkortet Betegnelse for $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{r}}$. Funktionen $\mathfrak{r}_{-\mathfrak{s}}$ er en speciel Form af den almindelige Satsfunktion $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{s}}$, idet

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}\leqq\mathfrak{t}-\mathfrak{s}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}-\mathfrak{s}} = \mathfrak{r}_{-\mathfrak{s}}\,;\; \mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{s}\geqq\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-} = \mathfrak{r}_{-\mathfrak{t}} \\ \qquad\qquad\qquad \text{og } \mathfrak{r}_{-\mathfrak{s}\geqq\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_{-\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_{-} \end{array}\right\} \quad (22)$$

Enhver Værdi af det første Element $\mathfrak{s}_1$, som er $> \mathfrak{r}$, Elementernes Sum, kan nemlig ikke give nogen Sats, hvorfor Satsantallet $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{s}\geqq\mathfrak{r}}$ eller $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\infty}$ vil være = Satsantallet $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-} = \mathfrak{r}_{-\mathfrak{t}}$. Den almindelige Satsfunktions øvrige Egenskaber saavelsom dens Beregning ville blive fremstillede i § 15.

§ 13. Overgangen fra y^n til $y^{n'}$ eller til $y^{\mathfrak{n}}$ udføres som, naar $\mathfrak{t} = \infty$ eller $\geqq \mathfrak{r}$, saaledes som det for dette Tilfælde er anført i § 6. Ved Overgangen fra y^n til $y^{\mathfrak{n}}$ maa i (16) n' ombyttes med $\mathfrak{n}$, og Formlen viser da, at enhver Værdi af det første Satselement $\mathfrak{s}_1$, som er $\geqq (\mathfrak{n}+1)$, maa gjøre $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i$ til Nul. Antallet af de ikke forsvindende Led $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i$ af Koefficienten $A_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{n})}$ til $x^{\mathfrak{r}}$ i $y^{\mathfrak{n}} = \Sigma A_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{n})} x^{\mathfrak{r}}$ bliver derfor, idet for disse Led $\mathfrak{s}_1 \leqq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{n}}$ i Overensstemmelse med den i § 12 vedtagne Betegnelse $\mathfrak{r}_{\mathfrak{t}-\mathfrak{s}}$ for Antallet af de Satser, i hvilke $\mathfrak{s}_1 \leqq \mathfrak{s}$.

b. Potensexponenten $n = \mathfrak{n}$, ɔ: positiv hel.

§ 14. I Formlen (3) træder $\mathfrak{n}$ i Stedet for n. Enhver Værdi for det første Satselement $\mathfrak{s}_1$, som er $\geqq (\mathfrak{n}+1)$, vilde gjøre $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i$ til Nul, og da man kun behøver at tage Hensyn til de ikke forsvindende Værdier af $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})_i$, kan $\mathfrak{s}_1$ stedse antages $\leqq \mathfrak{n}$. Derfor maa, naar $\mathfrak{r} > \mathfrak{n}$, i den 2den Betingelse (19) $\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{s}_1$ ombyttes med $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{s}_1$.

Tabellen over Satser og Potensexponenter dannes altsaa som i § 11 anført med den Forskjel, at, naar $r > n$, den første Sats begynder med $s_1 = n$ i Stedet for med $s_1 = r$. For $n = 4$, $t = 3$ og $r = 7$ faas saaledes Satserne:

r	s_1	s_2	s_3
7	4	3	0
	4	2	1
	3	3	1
	3	2	2

Det til enhver Værdi af r hørende Antal af Satser vil altsaa med den i § 12 vedtagne Betegnelse $\underset{t\overline{\;}s}{r}$ for Antallet af de Satser, i hvilke $s_1 \leqq s$, være $= \underset{t\overline{\;}r}{r} = \underset{t\overline{\;}}{r} = \underset{\overline{\;}t}{r}$, naar $r \leqq n$, og $\underset{t\overline{\;}n}{r}$, naar $r > n$; men, naar $n \geqq r$, vil $\underset{t\overline{\;}n}{r}$ være $= \underset{t\overline{\;}r}{r} = \underset{\overline{\;}t}{r}$, saa at man altid kan betegne det til enhver Værdi af r hørende Satsantal ved

$$\underset{t\overline{\;}n}{r}.$$

Derved forandres Formlen (5) til:

$$A_r^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=\underset{t\overline{\;}n}{r}} (n, r)_i. \tag{23}$$

§ 15. Den almindelige Satsfunktion $\underset{t\overline{\;}s}{r}$ angiver Antallet af de Satser, hvis t Elementer $s_1, s_2, \ldots s_t$ tilfredsstille Betingelserne

$$\left.\begin{array}{r} s_1 + s_2 + \ldots + s_t = r \\ r \geqq s \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_t \end{array}\right\} \tag{24}$$

De til Venstre for, over eller til Højre for Tegnet $_$ anførte Tal t, r og s betegne altsaa henholdsvis Antallet af Elementer i hver Sats, Elementernes Sum og den største i nogen af Satserne forekommende Værdi for det første Satselement s_1.

Alle de Satser, i hvilke s_1 har den samme Værdi, danne 1 Gruppe. Den »første« Gruppe, eller Gruppen s, er den, i hvilken s_1 har sin største Værdi s, den 2den Gruppe, eller Gruppen $(s - 1)$, er den, i hvilken $s_1 = (s - 1)$. Den »sidste« Gruppe er den, i

hvilken s_1 har sin mindste Værdi, ɔ: den mindste, der kan anvendes i en Sats. Denne Minimumsværdi for s_1 er det positive hele Tal (eller 0, hvis $r = 0$), som er $=$ eller nærmest $> \frac{r}{t}$. Er $t \geqq r$, bliver altsaa denne Minimumsværdi $= 1$. Er f. Ex. $t = 3$ og $r = 7$, bliver Minimumsværdien for s_1 nærmest $\geqq \frac{7}{3}$, altsaa 3.

Naar $t \geqq r$, gaar den almindelige Satsfunktion $r_{t\overline{\ }s}$ over til den mere specielle $r_{\overline{\ }s}$, som atter for $s \geqq r$ gaar over til Funktionen $r_{\overline{\ }}$. For $s \geqq r$ er $r_{t\overline{\ }s} = r_{t\overline{\ }} = r_{\overline{\ }t}$, som igjen for $t \geqq r$ bliver $= r_{\overline{\ }}$. Disse specielle Satsfunktioners Forhold til den almindelige Satsfunktion ere udtrykte i Formlerne (22).

Ligesom enhver Værdi af s_1, som er $\geqq r$, ikke vil kunne tilfredsstille (24) og altsaa ikke give nogen Sats, hvorfor ogsaa Satsantallet $r_{t\overline{\ }s \geqq r} = r_{t\overline{\ }r} = r_{\overline{\ }t}$, saaledes vil heller ikke nogen Værdi for s_1, som er $<$ Minimumsværdien for s_1, kunne give nogen Sats, hvorfor

$$\left.\begin{aligned} r_{t\overline{\ }s < \frac{r}{t}} &= 0, \\ \text{ligesom } -r_{t\overline{\ }s} &= 0, \\ \text{hvorimod } 0_{t\overline{\ }s \geqq 0} &= 0_{\overline{\ }t} = 1 \\ \text{og } 1_{t\overline{\ }s \geqq 1} &= 1_{\overline{\ }t} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Sættes i (25) $t \geqq r$, faas Formlerne (6) og (7) med Undtagelse af $r_{\overline{\ }1} = 1$.

Ved den samme Funktion $y = \sum_{r=0}^{r=t} a_r x^r$ er t konstant, og det er for denne givne Værdi af t, at Satsantallet $r_{t\overline{\ }s}$ skal beregnes som Sikkerhed for, at der i den til Beregningen af A_r i (20) eller (23) dannede Tabel over Satser og Potensexponenter findes det rigtige Antal af Satser. Det kommer da an paa at

fremstille en Fundamentalligning, hvoraf $\underset{t\overline{\ \ }s}{r}$ kan beregnes for den givne konstante Værdi af t.

Antallet af Satser i Gruppen s, eller, hvad der er det samme, Antallet af de Satser, i hvilke $s_1 = s$, er $= \underset{t\overline{\ \ }s}{r} - \underset{t\overline{\ \ }s-1}{r}$; men, da disse Satser maa tilfredsstille Betingelserne

$$\left.\begin{array}{l} s_2 + s_3 + \dots + s_t = r - s \\ s \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \dots \geqq s_t \end{array}\right\},$$

bliver deres Antal ogsaa $= \underset{t-1\overline{\quad\ }s}{r-s}$. Følgelig haves

$$\underset{t\overline{\ \ }s}{r} - \underset{t\overline{\ \ }s-1}{r} = \underset{t-1\overline{\quad\ }s}{r-s}, \tag{26}$$

som for $t = \infty$, eller for $t \geqq r$, gaar over til Fundamentalligningen (8) for $\underset{\overline{\ \ }s}{r}$.

Men Funktionen $\underset{t\overline{\ \ }s}{r}$ har endnu en anden fundamental Egenskab end den, der indeholdes i (26). Tænker man sig nemlig af

$$y = a_0 + a_1 + \dots + a_r + \dots + a_{t-r} + \dots + a_{t-1} + a_t$$

y^s beregnet ved sukcessive Multiplikationer, altsaa $y^s = y \,.\, y \dots$ (s Faktorer), saa er det klart, at der for ethvert Led:

$$a_0^{s-s_1}\, a_1^{s_1-s_2} \,\dots\dots\, a_t^{s_{t-1}-s_t}\, a_t^{s_t}$$

maa haves et andet:

$$a_t^{s-s_1}\, a_{t-1}^{s_1-s_2} \,\dots\dots\, a_1^{s_{t-1}-s_t}\, a_0^{s_t}$$

men, sættes nu $a_r\, x^r$ i Stedet for a_r, saa bliver, naar

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{t-1} + s_t = r,$$

det første Led multipliceret med:

$$x^{(s_1-s_2)+2(s_2-s_3)+\dots+(t-1)(s_{t-1}-s_t)+t\,.\,s_t} = x^r,$$

det andet med

$$x^{t(s-s_1)+(t-1)(s_1-s_2)+\dots+2(s_{t-2}-s_{t-1})+(s_{t-1}-s_t)} = x^{ts-r}.$$

Det Antal af Led, der ere multiplicerede med x^r, bliver altsaa = det Antal af Led, der ere multiplicerede med x^{ts-r}; men det første Antal er ifølge (23) $\underset{t\overline{\ \ }s}{r}$, det andet $\underset{t\overline{\quad\ }s}{ts-r}$, altsaa haves

$$\underset{t\overline{\quad}s}{r} = \underset{t\overline{\quad}s}{ts - r}. \tag{27}$$

Den 1ste Ligning (25) kan ifølge (27) udledes af den 2den (25) og omvendt

Da det sidste Led i Rækken for y^n er $A_{tn}\, x^{tn}$, skal ifølge (23) $\underset{t\overline{\quad}n}{r}$ bestemmes for alle Værdier af r fra r = 1 til r = tn, for saa vidt ikke den udkrævede Nøjagtighed i Bestemmelsen af y^n kan paa Grund af Rækkens Konvergens opnaas ved et mindre Antal Led af Rækken for y^n. I modsat Fald vil det dog, ifølge (27), ikke være nødvendigt at beregne $\underset{t\overline{\quad}n}{r}$ for alle Værdier af r indtil tn inklusive. Det vil være tilstrækkeligt at beregne $\underset{t\overline{\quad}n}{r}$ for alle Værdier af r fra 1 og indtil $\frac{tn}{2}$ eller $\frac{tn-1}{2}$ inklusive, eftersom tn er et lige eller et ulige Tal.

Ifølge (27) er $\underset{t\overline{\quad}s-1}{r} = \underset{t\overline{\quad}s-1}{ts - r - t}$ og $\underset{t-1\overline{\quad}s}{r - s} = \underset{t-1\overline{\quad}s}{ts - r}$, hvilke Værdier, tilligemed Værdien for $\underset{t\overline{\quad}s}{r}$ ifølge (27), give, indsatte i (26),

$$\underset{t\overline{\quad}s}{ts - r} - \underset{t\overline{\quad}s-1}{ts - r - t} = \underset{t-1\overline{\quad}s}{ts - r}$$

eller med forandret Betegnelse:

$$\underset{t\overline{\quad}s}{r} - \underset{t\overline{\quad}s-1}{r - t} = \underset{t-1\overline{\quad}s}{r},$$

men (26) giver, naar r forandres til (r + s):

$$\underset{t\overline{\quad}s}{r + s} - \underset{t\overline{\quad}s-1}{r + s} = \underset{t-1\overline{\quad}s}{r},$$

som i Forbindelse med den foran staaende Ligning giver:

$$\underset{t\overline{\quad}s}{r + s} - \underset{t\overline{\quad}s-1}{r + s} = \underset{t\overline{\quad}s}{r} - \underset{t\overline{\quad}s-1}{r - t}.$$

Forandres heri (r + s) til r, erholdes følgende Fundamentalligning for $\underset{t\overline{\quad}s}{r}$ ved konstante Værdier af t:

$$\underset{t\overline{\quad}s}{r} = \underset{t\overline{\quad}s-1}{r} + \underset{t\overline{\quad}s}{r - s} - \underset{t\overline{\quad}s-1}{r - s - t}, \tag{28}$$

hvilken Fundamentalligning, der for $t \geqq r$ gaar over til Fundamentalligningen (8) for $\underset{\overline{\quad}s}{r}$, vil — i Forbindelse med de foregaaende Relationer (22) og (25), der dog tildels kunne udledes af (28), paa

samme Maade som i § 5 omtalt Relationerne (6) og (7) tildels kunne udledes af Fundamentalligningen (8) — være fuldstændig tilstrækkelig til Bestemmelsen af $r_{t\overline{\ }s}$ for enhver given konstant Værdi af t. Paa lignende Maade som i § 5 Fundamentalligningen (8) benyttedes til Konstruktionen af en Tavle over Værdierne af $r_{\overline{\ }s}$, vil man nu ogsaa her kunne benytte Fundamentalligningen (28) til at danne en Tavle over Værdierne af $r_{t\overline{\ }s}$ for en given konstant Værdi af t. I denne Tavle gives r efterhaanden Værdierne 1, 2, 3, ..., indtil den Værdi for r, ved hvilken Rækken for y^n eller y^n skal standse. Ved Rækken for y^n vil det under alle Omstændigheder, med mindre det sker for Kontrollens Skyld, i Henhold til de ved (27) gjorte Bemærkninger, være unødvendigt at gaa længere end til $r = \frac{tn}{2}$ eller $r = \frac{tn-1}{2}$, eftersom nt er lige eller ulige. Formlen (27) giver et Middel til paa flere Steder i Tavlen at kontrollere dennes Rigtighed. For enhver i Tavlen forekommende Værdi af r gives s en Række af Værdier fra den i den »sidste« Sats forekommende mindste Værdi for s_1 (nemlig det hele Tal, der er nærmest $\geqq \frac{r}{t}$) til den i den »første« Sats forekommende største Værdi for s_1 (nemlig r, hvis $r \leqq t$, og n, hvis $r > t$). I den følgende § 18 vil der blive givet et Exempel paa Konstruktionen af en saadan Tavle for $t = 4$ og $n = 5$.

Lignende Formler som de i § 5 udviklede til Beregningen af $r_{\overline{\ }s}$ vilde ogsaa kunne udledes for Beregningen af $r_{t\overline{\ }s}$; men de ville næppe være af stor Betydning, og den foran anførte tabellariske Beregning bør vistnok foretrækkes. Dog bør det ikke forblive ubemærket, at Beregningen af $r_{t\overline{\ }s}$ kan henføres til Beregningen af Funktionen af $r_{\overline{\ }s}$ og dermed altsaa ogsaa til de for denne Funktion i § 5 udviklede Formler.

Sammenligner man nemlig ved samme Værdi af r Tabellen over Satserne for $t = \infty$ eller $t \geqq r$ med Tabellen over Satserne for $t < r \leqq n$, saa vil man finde, at de Satser i begge Tabeller, i

hvilke s_1 har Værdierne fra $(s+1)$ til r inklusive, ville være sammenfaldende, hvis den »sidste« Gruppe (ɔ: den, i hvilken $s_1 = s+1$) indeholder Satsen: $s_1 = s+1,\ s_2 = s_3 = \dots = s_t = 1$, eller Satsen $s_1 = s+1,\ s_2 = s_3 = \dots = s_{t-1} = 1,\ s_t = 0$, eller Satsen $s_1 = s+1,\ s_2 = s_3 = \dots = s_{t-2} = 1,\ s_{t-1} = s_t = 0$, o. s. v., altsaa hvis

$$(s+1) + (t-1) = (s+t) \text{ er } \geqq r.$$

I saa Fald ville Satserne i Grupperne $(s+1)$ til r i begge Tabeller være sammenfaldende og altsaa lige store i Antal, ɔ:

$$\underset{\overline{\ \ }r}{r} - \underset{\overline{\ \ }s}{r} = \underset{t\overline{\ \ }r}{r} - \underset{t\overline{\ \ }s}{r}, \text{ eller ifølge (22):}$$

$$\left.\begin{aligned} &\underset{t\overline{\ \ }s}{r} = \underset{\overline{\ \ }t}{r} + \underset{\overline{\ \ }s}{r} - \underset{\overline{\ \ }}{r} \\ &\text{for } (t+s) \geqq r. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Naar Betingelsen for Gyldigheden af (29), nemlig at Elementernes Antal + det første Satselements Maximumsværdi skal være $\geqq$ Elementernes Sum, ikke er opfyldt, vil man dog ved en successiv Anvendelse af (26) kunne skaffe denne Betingelse til Stede. Af (26) faas nemlig

$$\begin{aligned} \underset{t\overline{\ \ }s}{r} &= \underset{t\overline{\ \ }s+1}{r} - \underset{t-1\overline{\qquad}s+1}{r-s-1} \\ \underset{t\overline{\ \ }s+1}{r} &= \underset{t\overline{\ \ }s+2}{r} - \underset{t-1\overline{\qquad}s+2}{r-s-2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underset{t\overline{\ \ }s+q}{r} &= \underset{t\overline{\ \ }s+1+q}{r} - \underset{t-1\overline{\qquad}s+1+q}{r-s-1-q}, \end{aligned}$$

hvoraf man, ifølge (21), for $q = (r-s-1)$ ved Addition erholder

$$\left.\begin{aligned} \underset{t\overline{\ \ }s}{r} = \underset{\overline{\ \ }t}{r} - \sum_{q=0}^{q=r-s-1} \underset{t-1\overline{\qquad}s+1+q}{r-s-1-q} &= \\ = \underset{\overline{\ \ }t}{r} - \sum_{p=0}^{p=r-s-1} \underset{t-1\overline{\ \ }r-p}{p} & \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Naar Formlen (29) skal kunne bringes til Anvendelse paa alle Størrelserne under Σ-Tegnet, maa man have $(t-1)+(s+1) \geqq (r-s-1)$, eller $(t+s) \geqq r-(s+1)$, medens der, for at (29) skulde kunne anvendes umiddelbart paa $\underset{t\overline{\ \ }s}{r}$, krævedes, at $(t+s) \geqq r$. Er der endnu ikke ved (30) opnaaet, at (29) kan

anvendes paa alle Størrelserne under Σ Tegnet, saa bringes (30) paany i Anvendelse for de af Størrelserne under Σ Tegnet, der ikke tilfredsstille Betingelsen for (29), og saaledes kan der fortsættes, indtil $\underset{t\rceil s}{r}$ bliver ved Hjælp af (30) og (29) udtrykt ved en Række af Størrelser, alle henhørende under Funktionsformen $\underset{\rceil s}{r}$.

§ 16. Det hele Antal af Led i Udviklingen af $\left(\sum_{r=0}^{r=t} a_r x^r\right)^n$, eller Antallet af Kombinationer med Gjentagelser af (t + 1) Elementer til n, er som bekjendt (Ramus: Diff. og Integral-Regning, S. 7):

$$L_{t,n} = \frac{(t+1)(t+2)\ldots(t+n)}{[n]}, \tag{31}$$

der, ifølge (23) og § 15, ogsaa vilde kunne udtrykkes ved:

$$\left.\begin{aligned} L_{t,n} &= \underset{t\rceil n}{\tfrac{1}{2}nt} + 2 \sum_{r=0}^{r=\frac{nt}{2}-1} \underset{t\rceil n}{r} \text{ for nt lige} \\ \text{og} \quad L_{t,n} &= 2 \sum_{r=0}^{r=\frac{nt-1}{2}} \underset{t\rceil n}{r} \text{ for nt ulige} \end{aligned}\right\} \tag{31'}$$

i hvilke Formler $\underset{t\rceil n}{0} = \underset{t\rceil n}{1} = 1$, og $\underset{t\rceil n \geqq r}{r} = \underset{t\rceil r}{r} = \underset{t\rceil}{r} = \underset{\rceil t}{r}$ ifølge (22).

I § 18 ville Formlerne (31) og (31)' blive anvendte paa et Exempel.

§ 17. Overgangen fra y^n til y^n eller til $y^{n'}$ udføres ganske som i § 9, for Tilfældet t = ∞ eller $\geqq$ r, omtalt.

§ 18. Den i § 15 omtalte Fremgangsmaade ved Konstruktionen af en Tavle over Værdierne af $\underset{t\rceil s}{r}$ for en konstant Værdi af t — saa vel som Anvendelsen af Formlerne (31) og (31)' — ville vi anvende paa et Exempel, i hvilket Tavlen skal benyttes til Bestemmelsen af

$$y^5 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^5 = \sum_{r=0}^{r=20} A_r x^r,$$

og hvor man altsaa har givet t = 4 og n = 5.

r	s	r—s	${}_4\underline{r-s}_s$	r—s—4	s—1	${}_4\underline{r-s-4}_{s-1}$	${}_4\underline{r-s}_s - {}_4\underline{r-s-4}_{s-1}$	${}_4\underline{r}_s = {}_4\underline{r}_{s-1} + {}_4\underline{r-s}_s - {}_4\underline{r-s-4}_{s-1}$	Kontrol ifølge (27) ${}_4\underline{4s-r}_s$
0	0	0	1	—	—	0	1	$1 = \underline{0} = {}_4\underline{0}_5$	
1	1	0	1	—	0	0	1	$1 = \underline{1} = {}_4\underline{1}_5$	${}_4\underline{3}_1$
2	1	1	1	—	0	0	1	1	
	2	0	1	—	1	0	1	$2 = \underline{2} = {}_4\underline{2}_5$	${}_4\underline{6}_2$
3	1	2	1	—	0	0	1	1	${}_4\underline{1}_1$
	2	1	1	—	1	0	1	2	${}_4\underline{5}_2$
	3	0	1	—	2	0	1	$3 = \underline{3} = {}_4\underline{3}_5$	${}_4\underline{9}_3$
4	1	3	1	—	0	0	1	1	${}_4\underline{0}_1$
	2	2	2	—	1	0	2	3	
	3	1	1	—	2	0	1	4	${}_4\underline{8}_3$
	4	0	1	—	3	0	1	$5 = \underline{4} = {}_4\underline{4}_5$	
5	2	3	2	—	1	0	2	2	${}_4\underline{3}_2$
	3	2	2	—	2	0	2	4	${}_4\underline{7}_3$
	4	1	1	—	3	0	1	5	
	5	0	1	—	4	0	1	$6 = {}_4\underline{5}_5$	
6	2	4	3	0	1	1	2	2	${}_4\underline{2}_2$
	3	3	3	—	2	0	3	5	
	4	2	2	—	3	0	2	7	${}_4\underline{10}_4$
	5	1	1	—	4	0	1	$8 = {}_4\underline{6}_5$	
7	2	5	2	1	1	1	1	1	${}_4\underline{1}_2$
	3	4	4	0	2	1	3	4	${}_4\underline{5}_3$
	4	3	3	—	3	0	3	7	${}_4\underline{9}_4$
	5	2	2	—	4	0	2	$9 = {}_4\underline{7}_5$	
8	2	6	2	2	1	1	1	1	${}_4\underline{0}_2$
	3	5	4	1	2	1	3	4	${}_4\underline{4}_3$
	4	4	5	0	3	1	4	8	${}_8\underline{8}_4$
	5	3	3	—	4	0	3	$11 = {}_4\underline{8}_5$	
9	3	6	5	2	2	2	3	3	${}_4\underline{3}_3$
	4	5	5	1	3	1	4	7	${}_4\underline{7}_4$
	5	4	5	0	4	1	4	$11 = {}_4\underline{9}_5$	
10	3	7	4	3	2	2	2	2	${}_4\underline{2}_3$
	4	6	7	2	3	2	5	7	${}_4\underline{6}_4$
	5	5	6	1	4	1	5	$12 = {}_4\underline{10}_5$	

Naar Tavlen fortsættes, vende, ifølge (27), Værdierne for $\underset{4-5}{\mathfrak{r}}$ tilbage i modsat Orden, idet man faar $\underset{4-5}{11} = \underset{4-5}{9}$, $\underset{4-5}{12} = \underset{4-5}{8}$, ... $\underset{4-5}{20} = \underset{4-5}{0}$. En Fortsættelse vilde altsaa give en fuldstændig Kontrol for Beregningen af $\underset{4-5}{\mathfrak{r}}$; men i øvrigt giver (27), naar Tavlen fortsættes indtil $\mathfrak{r} = 4 \,.\, 5 = 20$, en gjennemgaaende Kontrol for samtlige beregnede Værdier af $\underset{4-\mathfrak{s}}{\mathfrak{r}}$ med Undtagelse af dem, for hvilke $\mathfrak{r} = (4\mathfrak{s} - \mathfrak{r})$, ɔ: $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{s}$. I den ovenfor beregnede Del af Tavlen, indtil $\mathfrak{r} = \frac{4 \,.\, 5}{2} = 10$, haves ved Hjælp af (27) Kontrol paa de Steder, der ere betegnede i den sidste Kolonne ved $\underset{4-\mathfrak{s}}{4\mathfrak{s} - \mathfrak{r}}$.

Tavlen viser ikke blot, hvor mange ($\underset{4-5}{\mathfrak{r}}$) Satser der i Tabellen over Satserne skal være for hver Værdi af $\mathfrak{r}$ fra $\mathfrak{r} = 0$ til $\mathfrak{r} = 20$, men ogsaa, hvor mange Satser der for hver Værdi af $\mathfrak{r}$ skal findes i Gruppen $\mathfrak{s}$, ɔ: i den Gruppe, hvis første Element $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}$. Dette Antal er nemlig $= \underset{4-\mathfrak{s}}{\mathfrak{r}} - \underset{4-\mathfrak{s}-1}{\mathfrak{r}}$. For $\mathfrak{r} = 8$ findes saaledes i Gruppen 4 et Antal af $(8 - 4) = 4$ Satser. Den første Del af Tavlen indtil $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} = 4$ inklusive er selvfølgelig fuldstændig sammenfaldende med den tilsvarende Del af Tavlen i § 5 over $\underset{-\mathfrak{s}}{\mathfrak{r}}$.

Ifølge (31) bliver det hele Antal af Addender af Formen (3): $L_{4,5} = 126$, medens den 1ste (31)' giver:

$$L_{4,5} = \underset{4-5}{10} + 2 \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=9} \underset{4-5}{\mathfrak{r}}, \text{ eller ifølge Tavlen}$$

$$L_{4,5} = 12 + 2\,(1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + 11 + 11) = 126.$$

II. Rækker for omvendte Funktioner.

§ 19. Naar Funktionen $\varphi(x)$ er given ved Rækken:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(a) = (x-a)^m \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} c_\mathfrak{r}\,(x-a)^{p\mathfrak{r}} = \\ c_0\,(x-a)^m \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} a_\mathfrak{r}\,(x-a)^{p\mathfrak{r}}, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

hvori $m > 0$ og $p > 0$, t endelig eller uendelig, samt

$$\frac{c_\mathfrak{r}}{c_0} = a_\mathfrak{r},\ a_0 = 1,$$

og man vil søge Rækken for den omvendte Funktion x, saa sættes

$$x - a = \sum_{\mathfrak{q}=0}^{\mathfrak{q}=\infty} b_\mathfrak{q} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{c_0}\right)^{\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}}, \tag{33}$$

hvori Koefficienterne $b_\mathfrak{q}$ bestemmes ved Indsættelse, ifølge (32), af

$$\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{c_0}\right)^{\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}} = (x-a)^{1+p\mathfrak{q}} \cdot \left(\sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} a_\mathfrak{r} (x-a)^{p\mathfrak{r}}\right)^{\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}} =$$

$$(x-a)^{1+p\mathfrak{q}} \cdot \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_\mathfrak{r}^{\left(\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}\right)} (x-a)^{p\mathfrak{r}}.$$

Bortdivideres derpaa $(x - a)$ i (33), saa faas:

$$1 = b_0 \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_\mathfrak{r}^{\left(\frac{1}{m}\right)} (x-a)^{p\mathfrak{r}} + b_1 \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_\mathfrak{r}^{\left(\frac{1+p}{m}\right)} (x-a)^{p(\mathfrak{r}+1)} + \ldots$$

eller

$$1 = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} \left(b_0 A_\mathfrak{r}^{\left(\frac{1}{m}\right)} + b_1 A_{\mathfrak{r}-1}^{\left(\frac{1+p}{m}\right)} + \ldots + b_\mathfrak{q} A_{\mathfrak{r}-\mathfrak{q}}^{\left(\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}\right)} + \ldots\right) (x-a)^{p\mathfrak{r}}.$$

Heraf faas da, idet $A_0 = 1$, $A_{-1} = A_{-2} = \ldots = 0$, for Koefficienterne til $(x-a)^0$, $(x-a)^p$, $(x-a)^{2p}$, ... henholdsvis:

$$\left.\begin{aligned} & b_0 - 1 = 0 \\ & A_1^{\left(\frac{1}{m}\right)} + b_1 = 0 \\ & A_2^{\left(\frac{1}{m}\right)} + b_1 A_1^{\left(\frac{1+p}{m}\right)} + b_2 = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

hvorved Koefficienterne b_0, b_1, b_2, ... efterhaanden bestemmes, efterat Koefficienterne $A_{\mathfrak{r}-\mathfrak{q}}^{\left(\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}\right)}$ ere blevne beregnede ifølge §§ 4 og 6, naar t er uendelig eller $\geqq (\mathfrak{r} - \mathfrak{q})$, eller ifølge §§ 11, 12 og 13, naar $\mathfrak{t} < (\mathfrak{r} - \mathfrak{q})$. Idet $\left(\frac{1}{m}, \mathfrak{r}\right)_\mathfrak{i}$ beregnes ifølge (3) ved

Hjælp af Tabellen S. 70 over Satser og Potensexponenter, vil det blive det simpleste at bestemme $A_0^{\left(\frac{1}{m}\right)}$, $A_1^{\left(\frac{1}{m}\right)}$, $A_2^{\left(\frac{1}{m}\right)}$ ...

$$A_{\mathfrak{r}}^{\left(\frac{1}{m}\right)} = \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}-\mathfrak{t}} \left(\frac{1}{m}, \mathfrak{r}\right)_{\mathfrak{i}}$$

og derefter beregne

$$A_{\mathfrak{r}-\mathfrak{q}}^{\left(\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}\right)} = \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}-\mathfrak{q}-\mathfrak{t}} \left(\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}, \mathfrak{r}-\mathfrak{q}\right)_{\mathfrak{i}}$$

ifølge Formlen

$$\left(\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}, \mathfrak{r}-\mathfrak{q}\right)_{\mathfrak{i}} = \left(\frac{1}{m}, \mathfrak{r}-\mathfrak{q}\right)_{\mathfrak{i}} \frac{\left\{\frac{1}{m}-\mathfrak{s}_1\right\}}{\left\{\frac{1}{m}\right\}} \cdot \frac{\left\{\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}\right\}}{\left\{\frac{1+p\mathfrak{q}}{m}-\mathfrak{s}_1\right\}}.$$

§ 20. Naar man i den givne Række (32) for $\varphi(x)$ har $m = 1$ og $p = \mathfrak{p}$, ɔ: positiv hel, kan Rækken for x findes paa en meget simplere Maade. Af Burmann's Formel (Ramus: Algebra og Funktionslære, 2. Kapitel, 5. Afsnit) erholdes nemlig Rækken

$$\left.\begin{aligned} x - a &= \sum_{\mathfrak{n}=1}^{\mathfrak{n}=\infty} B_{\mathfrak{n}} (\varphi(x) - \varphi(a))^{\mathfrak{n}} \\ B_{\mathfrak{n}} &= \left(\frac{d^{\mathfrak{n}-1}\left(\frac{x-a}{\varphi(x)-\varphi(a)}\right)^{\mathfrak{n}}}{[\mathfrak{n}] \cdot dx^{\mathfrak{n}-1}}\right)_{x=a} \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

saa at

$$\varphi(x) - \varphi(a) = c_0 (x-a) \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} a_{\mathfrak{r}} (x-a)^{\mathfrak{p}\mathfrak{r}};\ a_0 = 1 \qquad (36)$$

giver

$$\left(\frac{x-a}{\varphi(x)-\varphi(a)}\right)^{\mathfrak{n}} = \frac{1}{c_0^{\mathfrak{n}}} \left(\sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\mathfrak{t}} a_{\mathfrak{r}} (x-a)^{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}\right)^{-\mathfrak{n}} = \frac{1}{c_0^{\mathfrak{n}}} \cdot \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_{\mathfrak{r}}^{(-\mathfrak{n})} (x-a)^{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$$

og

$$\frac{1}{[\mathfrak{n}]} \frac{d^{\mathfrak{n}-1}}{dx^{\mathfrak{n}-1}} \left(\frac{x-a}{\varphi(x)-\varphi(a)}\right)^{\mathfrak{n}} = \frac{1}{c_0^{\mathfrak{n}}[\mathfrak{n}]} \cdot \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_{\mathfrak{r}}^{(-\mathfrak{n})} \frac{[\mathfrak{p}\mathfrak{r}]}{[\mathfrak{p}\mathfrak{r}+1-\mathfrak{n}]} (x-a)^{\mathfrak{p}\mathfrak{r}+1-\mathfrak{n}}.$$

For $\mathfrak{n} = (\mathfrak{p}\mathfrak{r}+1)$ og $x = a$ faas da heraf, ifølge (35) og (20):

$$B_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}+1} = \frac{A_{\mathfrak{r}}^{(-1-\mathfrak{p}\mathfrak{r})}}{c_0^{\mathfrak{p}\mathfrak{r}+1}(\mathfrak{p}\mathfrak{r}+1)} = \frac{1}{c_0^{1+\mathfrak{p}\mathfrak{r}}(1+\mathfrak{p}\mathfrak{r})} \cdot \sum_{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}}^{\mathfrak{i}=\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{t}}} (-1-\mathfrak{p}\mathfrak{r}, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}},$$

men ifølge (16) og (1)' er

$$(-1-\mathfrak{p}\mathfrak{r}, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}} = (-1, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}} \frac{\{-1-\mathfrak{s}_1\}}{\{-1\}} \cdot \frac{\{-1-\mathfrak{p}\mathfrak{r}\}}{\{-1-\mathfrak{p}\mathfrak{r}-\mathfrak{s}_1\}} =$$

$$(-1, \mathfrak{r})_{\mathfrak{i}} \cdot \frac{\{-1-\mathfrak{s}_1\}}{\{-1\}} \cdot (-1)^{\mathfrak{s}_1} \frac{[\mathfrak{p}\mathfrak{r}+\mathfrak{s}_1]}{[\mathfrak{p}\mathfrak{r}]},$$

saa at (3) giver

$$\left.\begin{aligned} B_{1+\mathfrak{p}\mathfrak{r}} &= \frac{1}{c_0^{1+\mathfrak{p}\mathfrak{r}}} \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\underline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{t}}} (-1)^{\mathfrak{s}_1} \frac{[\mathfrak{p}\mathfrak{r}+\mathfrak{s}_1]}{[\mathfrak{p}\mathfrak{r}+1]} \cdot \frac{a_1^{\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2}}{[\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2]} \cdot \\ &\qquad \frac{a_2^{\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3}}{[\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3]} \cdots \frac{a_{\mathfrak{r}-1}^{\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}-1}-\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}}}{[\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}-1}-\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}]} \cdot \frac{a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}}}{[\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}]} (\mathfrak{i}) \\ B_1 &= \frac{1}{c_0};\ x - a = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} B_{1+\mathfrak{p}\mathfrak{r}} (\varphi(x) - \varphi(a))^{1+\mathfrak{p}\mathfrak{r}}, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

idet $\mathfrak{s}_1$ og Potensexponenterne $(\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2), \ldots \mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}$ udtages af Tabellen S. 70 over Satser og Potensexponenter.

Som Exempel paa Benyttelsen af (36) og (37) ville vi tage

$$\varphi(x) = arc\,(tg = x) = x \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{r}}}{2\mathfrak{r}+1} x^{2\mathfrak{r}},$$

som, sammenholdt med (36), viser, at $a = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\mathfrak{t} = \infty$, $\mathfrak{p} = 2$, $c_0 = 1$ og $a_{\mathfrak{r}} = \frac{c_{\mathfrak{r}}}{c_0} = \frac{(-1)^{\mathfrak{r}}}{2\mathfrak{r}+1}$.

(37) giver da

$$x = tg\,\varphi = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} B_{1+2\mathfrak{r}} \cdot \varphi^{1+2\mathfrak{r}};\ B_1 = 1 \text{ og}$$

$$B_{1+2\mathfrak{r}} = \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\underline{\mathfrak{r}}} (-1)^{\mathfrak{s}_1} \frac{[2\mathfrak{r}+\mathfrak{s}_1]}{[2\mathfrak{r}+1]} \cdot \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^{\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2}}{[\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2]} \cdot \frac{\left(\frac{+1}{5}\right)^{\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3}}{[\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3]} \cdot$$

$$\frac{\left(\frac{-1}{7}\right)^{\mathfrak{s}_3-\mathfrak{s}_4}}{[\mathfrak{s}_3-\mathfrak{s}_4]} \cdot \frac{\left(\frac{+1}{9}\right)^{\mathfrak{s}_4-\mathfrak{s}_5}}{[\mathfrak{s}_4-\mathfrak{s}_5]} \cdot \frac{\left(\frac{-1}{11}\right)^{\mathfrak{s}_5-\mathfrak{s}_6}}{[\mathfrak{s}_5-\mathfrak{s}_6]} \cdots (\mathfrak{i}),$$

hvoraf man, ved Hjælp af Tabellen S. 70 over Satser og Potensexponenter, kan beregne en Tavle over de $\underline{\mathfrak{r}}$ Addender i $B_{1+2\mathfrak{r}}$.

Tavle for Beregningen af B_{1+2r} i § 20 (nederst S. 98).

r	s_1	De r Addender i B_{1+2r}		B_{1+2r}
0	0	1	$=+1$	$B_1=+1$
1	1	$-\frac{[3]}{[3]}\cdot\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^1}{[1]}$	$=+\frac{1}{3}$	$B_3=+\frac{1}{3}$
2	2	$+\frac{[6]}{[5]}\cdot\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}{[2]}.1$	$=+\frac{1}{3}$	
	1	$-\frac{[5]}{[5]}.1.\frac{\left(\frac{+1}{5}\right)^1}{[1]}$	$=-\frac{1}{5}$	$B_5=+\frac{2}{3.5}=+\frac{2}{15}$
3	3	$-\frac{[9]}{[7]}\cdot\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^3}{[3]}.1.1$	$=+\frac{4}{3^2}$	
	2	$+\frac{[8]}{[7]}\cdot\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^1}{[1]}\cdot\frac{\left(\frac{+1}{5}\right)^1}{[1]}.1$	$=-\frac{8}{3.5}$	
	1	$-\frac{[7]}{[7]}.1.1.\frac{\left(\frac{-1}{7}\right)^1}{[1]}$	$=+\frac{1}{7}$	$B_7=\frac{+17}{3^2.5.7}=+\frac{17}{315}$
4	4	$+\frac{[12]}{[9]}\cdot\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^4}{[4]}.1.1.1$	$=+\frac{55}{3^4}$	
	3	$-\frac{[11]}{[9]}\cdot\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}{[2]}\cdot\frac{\left(\frac{+1}{5}\right)^1}{[1]}.1.1$	$=-\frac{11}{3^2}$	
	2	$+\frac{[10]}{[9]}.1.\frac{\left(\frac{+1}{5}\right)^2}{[2]}.1.1$	$=+\frac{1}{5}$	
	2	$+\frac{[10]}{[9]}\cdot\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^1}{[1]}.1.\frac{\left(\frac{-1}{7}\right)^1}{[1]}.1$	$=+\frac{10}{3.7}$	
	1	$-\frac{[9]}{[9]}.1.1.1.\frac{\left(\frac{+1}{9}\right)^1}{[1]}$	$=-\frac{1}{3^2}$	$B_9=\frac{+62}{3^4.5.7}=+\frac{62}{2835}$
				o. s. v.

Man faar derved

$$tg\,\varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{15}\varphi^5 + \frac{17}{315}\varphi^7 + \frac{62}{2835}\varphi^9 + \frac{1382}{155925}\varphi^{11} + \ldots,$$

hvilken Række er fuldstændig overensstemmende med den i § 7 ad anden Vej fundne Række for $tg\,x$.

§ 21. Overgangen ved Differentialkoefficienter fra x som uafhængig og y som afhængig til y som uafhængig og x som afhængig variabel.

Naar man i Rækken (36) for $\varphi(x)$ har $\mathfrak{p} = 1$, bliver $c_0 = \varphi'(a)$, $c_0\, a_{\mathfrak{r}} = \frac{\varphi^{(1+\mathfrak{r})}(a)}{[1+\mathfrak{r}]}$, eller, naar man i Stedet for $\varphi(x)$ sætter y,

$$a_{\mathfrak{r}} = \frac{1}{[\mathfrak{r}+1]} \cdot \frac{\left(\frac{d^{\mathfrak{r}+1} y}{dx^{\mathfrak{r}+1}}\right)_{x=a}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}}.$$

Samtidig bliver $B_{1+\mathfrak{r}} = \frac{1}{[\mathfrak{r}+1]}\left(\frac{d^{\mathfrak{r}+1} x}{dy^{\mathfrak{r}+1}}\right)_{x=a}$.

Indsættes disse Betegnelser i den 1ste (37), erholdes for $\mathfrak{t} = \infty$ eller $\mathfrak{t} \geqq \mathfrak{r}$, $\frac{d^{\mathfrak{r}+1} x}{dy^{\mathfrak{r}+1}}$ udtrykt ved $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{\mathfrak{r}+1} y}{dx^{\mathfrak{r}+1}}$, hvori, naar Formlen skal bruges til Fremstillingen af Rækken for x i den 2den (37), efter Differentiationerne x sættes $= a$ og $y = \varphi(a)$; men, da a er vilkaarlig, er Relationen i den 1ste (37) mellem Differentialkoefficienterne med Hensyn til x og med Hensyn til y gjældende for enhver Værdi af x.

Indføres derfor de forkortede Betegnelser:

$$\frac{d^{\mathfrak{r}} y}{dx^{\mathfrak{r}}} = p_{\mathfrak{r}} \text{ og } \frac{d^{\mathfrak{r}} x}{dy^{\mathfrak{r}}} = q_{\mathfrak{r}}, \qquad (38)$$

saa erholdes af den 1ste (37), Relationen:

$$\left.\begin{aligned} q_{\mathfrak{r}+1} = \sum_{i=1}^{i=\mathfrak{r}} (-1)^{\mathfrak{s}_1} \frac{[\mathfrak{r}+\mathfrak{s}_1]}{p_1^{1+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}_1}} \cdot \frac{\left(\frac{p_2}{[2]}\right)^{\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2}}{[\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2]} \cdot \frac{\left(\frac{p_3}{[3]}\right)^{\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3}}{[\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3]} \cdots \\ \frac{\left(\frac{p_{\mathfrak{r}}}{[\mathfrak{r}]}\right)^{\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}-1}-\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}}}{[\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}-1}-\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}]} \cdot \frac{\left(\frac{p_{\mathfrak{r}+1}}{[\mathfrak{r}+1]}\right)^{\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}}}{[\mathfrak{s}_{\mathfrak{r}}]}\,(i);\quad q_1 = \frac{1}{p_1}, \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

idet $\mathfrak{s}_1$ og Potensexponenterne $(\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2), \ldots \mathfrak{s}_\mathfrak{r}$ udtages for den givne Værdi af $\mathfrak{r}$ af Tabellen S. 70 over Satser og Potensexponenter.

Relationen (39) kunde ogsaa erholdes ved at gaa ud fra den bekjendte Formel (Ramus: Differential og Integral-Regning. S. 28. Formel (4)).

$$q_\mathfrak{n} = \left(\frac{d^{\mathfrak{n}-1}\left(p_1 + p_2\frac{h}{[2]} + p_3\frac{h^2}{[3]} + \ldots\right)}{dh^{\mathfrak{n}-1}}\right)_{h=0}$$

Sættes nemlig heri

$$\frac{p_{\mathfrak{r}+1}}{[\mathfrak{r}+1]p_1} = a_\mathfrak{r},$$

saa faas, idet $a_0 = 1$,

$$q_\mathfrak{n} = \frac{1}{p_1^\mathfrak{n}}\left(\frac{d^{\mathfrak{n}-1}.\left(\sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} a_\mathfrak{r} x^\mathfrak{r}\right)^{-\mathfrak{n}}}{dx^{\mathfrak{n}-1}}\right)_{x=0} =$$

$$\frac{1}{p_1^\mathfrak{n}}\left(\frac{d^{\mathfrak{n}-1}.\sum_{\mathfrak{r}=0}^{\mathfrak{r}=\infty} A_\mathfrak{r}^{(-\mathfrak{n})} x^\mathfrak{r}}{dx^{\mathfrak{n}-1}}\right)_{x=0} = \frac{[\mathfrak{n}-1]}{p_1^\mathfrak{n}} A_{\mathfrak{n}-1}^{(-\mathfrak{n})}$$

eller ifølge (5) og (16):

$$q_{\mathfrak{r}+1} = \frac{[\mathfrak{r}]}{p_1^{1+\mathfrak{r}}} A_\mathfrak{r}^{(-1-\mathfrak{r})} = \frac{[\mathfrak{r}]}{p_1^{1+\mathfrak{r}}} \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}} (-1-\mathfrak{r}, \mathfrak{r})_\mathfrak{i} =$$

$$\frac{[\mathfrak{r}]}{p_1^{1+\mathfrak{r}}} \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}} (-1, \mathfrak{r})_\mathfrak{i} \frac{\{-1-\mathfrak{s}_1\}}{\{-1\}} \cdot \frac{\{-1-\mathfrak{r}\}}{\{-1-\mathfrak{r}-\mathfrak{s}_1\}}.$$

Af (1)' og (3) faas derefter

$$q_{\mathfrak{r}+1} = \frac{[\mathfrak{r}]}{p_1^{1+\mathfrak{r}}} \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}} (-1)^{\mathfrak{s}_1} \frac{[\mathfrak{r}+\mathfrak{s}_1]}{[\mathfrak{r}]} \cdot \frac{a_1^{\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2}}{[\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2]} \cdot \frac{a_2^{\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3}}{[\mathfrak{s}_2-\mathfrak{s}_3]} \cdots \frac{a_\mathfrak{r}^{\mathfrak{s}_\mathfrak{r}}}{[\mathfrak{s}_\mathfrak{r}]} (\mathfrak{i}),$$

som for $a_\mathfrak{r} = \frac{p_{\mathfrak{r}+1}}{p_1[\mathfrak{r}+1]}$ antager Formen (39).

ET THEOREM OM NETFORMIGE FIGURER.

(AF AXEL THUE.)

Forbinder man i Rummet en Samling Punkter med vilkaarlige sammenhængende Kurver, saa fremkommer en Figur, som vi ville kalde et Net. De givne Punkter kalde vi Nettets Knuder og de omtalte Forbindelseslinier mellem disse dets Grene.

Endelig ville vi ved en Maske i Nettet forstaa en enkelt kontinuerlig Kreds eller Ring af dets Grene.

Om saadanne Net existerer der nu en Række mærkelige Sætninger, af hvilke jeg skal fremstille en.

Disse Sætninger ere egentlig kun tilsyneladende geometriske; de udtale blot kombinatoriske Love.

I det efterfølgende forstaa vi ved Antallet af Masker i et Net Antallet af dem, der fremkomme ved kun at regne hver Gren to Gange og saaledes, at alle Grene blive medtagne [1]).

Man tænke sig nu, at der fra et vist Punkt i Nettet udgaar Strømninger langs samtlige dets Grene, saaledes at naar en Strøm kommer til en Knude, deler den sig og sender Strømme gjennem de øvrige Grene, der udgaa fra vort Knudepunkt.



Denne Strømning kan i Almindelighed ikke foregaa i det uendelige; thi der vil indtræde en Standsning paa Grund af Strømmenes Sammenstød, hvilke vi for Simpelheds Skyld forudsætte kun finde Sted paa Nettets Grene og saaledes, at Strømmene ikke fortsættes ud over Sammenstødspunkterne.

Paa hosstaaende Figur ere

[1]) Et Net kan paa flere Maader danne Maskesystemer som ovenstaaende; men Antallet af Masker i Systemet bliver derved dog uforandret.

Strømningernes Retninger betegnede ved Pilespidser, Sammenstødspunkterne ved Kryds, Udløbspunktet ved et *o*.

Som det let indses, faar man nu følgende Lemmata:

1. Paa hver af Nettets Masker maa der ligge mindst et Sammenstødspunkt.

2. Overhugges Nettet i alle Strømmenes Sammenstødspunkter, hænger det dog fremdeles sammen, eftersom man fra hvert af disse Punkter kan komme tilbage til Strømmenes Udgangspunkt.

3. Forudsætter man endelig for Simpelheds Skyld, at Nettet er enkelt sammenhængende, ɔ: at det kan udfoldes paa en enkelt sammenhængende Flade, faas:

Naar Nettet overhugges i samtlige Sammenstødspunkter, da forsvinder altid en og kun en Maske ved hvert Hug[1]), idet jo, naar en Gren forsvinder, de to Masker, der har denne fælles, gaar over til en Maske.

Ved det sidste Hug, naar der altsaa ifølge de ovenfor opstillede Sætninger blot kan være en Maske igjen, forsvinder, kan man sige, to Masker; idet den sidste da maa blive at regne dobbelt.

Det er aabenbart, at Sammenstødspunkterne, naar Udløbspunktet er givet, til en vis Grad kunne anbringes vilkaarlig, men hvorledes de end ere beliggende, gjælder dog følgende Theorem, som flyder temmelig direkte af ovenfor opstillede tre Sætninger:

Naar der fra et vilkaarligt Punkt i et enkelt sammenhængende Net udgaar Strømninger gjennem alle dets Grene, da er Antallet af Strømsammenstød uafhængigt af den Maade, hvorpaa Strømningen har forgrenet sig og lig Antallet af Masker i Nettet minus en.

Udgaa Strømmene fra n Punkter i Stedet for blot fra et, da vilde Nettet, som man ser, efter at være overhugget i Strømmenes Sammenstødspunkter, være delt i $n - 1$ Dele.

Heraf følger da strax en mere generel Sætning, der, naar

[1]) Naar der her siges en Maske, saa menes dermed en af dem, der repræsenterer vort ovenfor definerede Maskesystem.

Antallet af Masker betegnes med m og Antallet af Strømsammenstød med s, kan udtrykkes ved Formlen:

$$s = m + n - 2.$$

Et ret interessant Specialtilfælde af denne Sætning faas, idet man tænker sig Strømmene udgaaende fra alle Knuder i Nettet. Der maa da selvfølgelig blive et Sammenstød paa hver Gren, hvilket leverer os følgende Lov:

I ethvert enkelt sammenhængende Net er Antallet af Masker plus Antallet af Knuder minus Antallet af Grene lig 2; hvilken Formel ikke er andet end Euler's Sætning om Polyedre.

Har man nu et hvilket som helst Net, der altsaa ikke netop behøver at være enkelt sammenhængende, og overhugger det i Strømmenes Sammenstødspunkter, da kommer man til et eller flere maskeløse Net eller Forgreninger; hvortil man følgelig ogsaa maatte være kommen, om Nettet just havde været enkelt sammenhængende.

Paa Grund af nys nævnte Euler'ske Formel faa vi saaledes følgende ejendommelige Theorem:

Naar der fra n vilkaarlige Punkter i et hvilket som helst Net udgaar Strømninger gjennem alle dets Grene, da er Antallet af Strømsammenstød s, idet k og g henholdsvis betegner Antallet af Nettets Knuder og Grene, bestemt ved Formlen:

$$s = n + g - k.$$

Ligesom man af denne Formel kunde finde Antallet af Strømsammenstød, naar Antallet af Strømmenes Udløbspunkter var bekjendt, saaledes kunde man ogsaa omvendt finde disses Antal, naar Strømsammenstødenes Antal var kjendt, idet man da har:

$$n = s - g + k.$$

Men ved denne Omvending vil der imidlertid frembyde sig en Mærkelighed.

Lader man nemlig Antallet af de Punkter, mod hvilke Strømningen skal foregaa, være lig $g - k$, saa kan altsaa efter vor Formel Strømmen ingen Udløbspunkter have, og man vil, som det let forstaas, faa mindst en Maske, hvorpaa der intet Strømsammen-

stød findes. Strømmen gaar altsaa her i Ring, og der opstaar, hvad vi kunne kalde en Hvirvel.

Saadanne Hvirvler kunne for Resten ogsaa optræde, selv om Antallet af Strømmenes Udløbspunkter er forskjellige fra Nul, ja man kan endog bevise følgende Sats:

Naar der foregaar Strømninger i et Net, da er, uanset enten Strømningen gaar mod eller fra givne Punkter, Antallet af Hvirvler lig Antallet af de Dele, hvori Nettet deles ved Sammenstødspunkterne minus Antallet af Udløbspunkter. Det er klart, at vi ogsaa maa kunne tænke os Hvirvler som givne og Udløbs- og Sammenstødspunkter derved bestemte; idet der jo paa p Masker i Nettet, som ikke har noget Knudepunkt fælles, vil kunne tænkes uhindret at foregaa p i sig selv tilbageløbende Strømninger.

Som man ser, ville vi altid, naar de n Udløbspunkter ere givne, og uafhængig af, hvor de ere placerede, kunne finde s dertil svarende Sammenstødspunkter. Dette lader sig nu ikke bestandig omvendt gjøre, idet man nemlig kan give de s Sammenstødspunkter en saadan Stilling, at der, for at en Strømning skal gaa gjennem hele Nettet, maa findes flere Sammenstødspunkter.

Har man saaledes t. Ex. et Net med 6 Grene og 4 Knuder, da vil, naar $s = 2$, n være lig nul. Men placerede man nu to Sammenstødspunkter paa en og samme Gren, da maatte der absolut existere et Udløbspunkt mellem dem paa selv samme Gren, eller Strømningen i Nettet maatte da give Anledning til mindst tre Sammenstødspunkter.

Alle de her fremstillede Sætninger, der, som før sagt, blot udtale kombinatoriske Love, kunne finde Anvendelse paa saadanne algebraiske Forholde, der kunne afbildes ved en Forgrening eller et Net. Som Exempel paa Ting, der kan afbildes paa denne Vis, kan nævnes: Slægtregistre, Bygningsmaaden af et Bevis, et Rygtes Udbredelse o. s. v.

EXAMENSOPGAVER.

De lærde Skolers Afgangsexamen. Juni 1885.

Arithmetik.

1. At danne og opløse de symmetriske Ligninger, der give saadanne rationale Værdier for x og y, at

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 = 217 + 88\sqrt{6}.$$

2. Naar Rødderne α og β i en kvadratisk Ligning skulle tilfredsstille $x^n = Ax + B$, hvorledes maa da A og B bestemmes ved disse Rødder?

Anvendes til at finde A og B saaledes, at $x^{\frac{1}{2}} = Ax + B$, naar $x^2 - 32x + 1156 = 0$, hvorved mærkes, at der faas fire Udtryk for $x^{\frac{1}{2}}$, parvis forskjellige i Fortegn.

Opl. 1. $x^2 + 4x\sqrt{xy} + 6xy + 4y\sqrt{xy} + y^2 = 217 + 88\sqrt{6}$

deles i $$(x+y)^2 + 4xy = 217,$$

og $$(x+y)^2 \,.\, 4xy = 44^2 \,.\, 6.$$

Ligningen $$u^2 - 217u + 44^2 \,.\, 6 = 0$$

giver da $$\left.\begin{matrix}(x+y)^2 \\ 4xy\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}121 \\ 96.\end{matrix}\right.$$

For at faa rationale x og y maa man have

$$x + y = \pm 11,$$
$$xy = 24.$$

Med øverste Fortegn $x = 8,\ y = 3,$

med nederste $x = -8,\ y = -3.$

2. $$x^n - Ax - B = 0,$$
$$\alpha^n - A\alpha - B = 0,$$
$$\beta^n - A\beta - B = 0,$$

følgelig ved Elimination af A og B

$$\begin{vmatrix} x^n & x & 1 \\ \alpha^n & \alpha & 1 \\ \beta^n & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

eller $$x^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\,x - \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Exemplet giver $\quad x = 16 \pm 30\sqrt{-1} = \begin{cases}\alpha\\ \beta,\end{cases}$

hvoraf $\quad \alpha^{\frac{1}{2}} = \pm\left[\sqrt{\sqrt{289}+8}+\sqrt{\sqrt{289}-8}\,\sqrt{-1}\right]$

eller $\quad \alpha^{\frac{1}{2}} = \pm(5+3\sqrt{-1}),$

ligesaa $\quad \beta^{\frac{1}{2}} = \pm(5-3\sqrt{-1}).$

Tages disse Størrelser med samme Fortegn, faas

$$A = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}}{\alpha-\beta} = \pm\frac{1}{10},$$

$$B = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\beta-\alpha\beta^{\frac{1}{2}}}{\alpha-\beta} = \pm\frac{34}{10},$$

Men med modsatte Tegn give de

$$A = \mp\frac{\sqrt{-1}}{6},\quad B = \mp\frac{34\sqrt{-1}}{6},$$

altsaa $\quad x^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{x+34}{6}$ og $x^{\frac{1}{2}} = \mp\frac{x-34}{6}\sqrt{-1}.$

Beregningsopgave.

Vinklen imellem to Tangenter til en Cirkel er givet $2u = 84^0\ 48'\ 10''$ tilligemed Tangentvinklens Ben $a = 10'\ 3''$ (Duodecimalmaal). En ret Linie igjennem Tangenternes Skjæringspunkt under Vinklen $v = 54^0\ 56'\ 18''$ med det ene Ben skjærer Cirklen. Find den Korde, Cirklen afskjærer af Linien i Fod og Tommer, og Forholdet imellem de to Udsnit (Sektorer), som svare til de Buer, hvori Linien deler Periferien, udtrykt i hele Tal.

De nødvendige Logarithmeregninger forlanges udførte med Formler, som ere bekvemme for denne Regning.

Opl. Sættes C ved Centrum, M og N ved Kordens Endepunkter, P ved dens Midtpunkt, saa er

$$MN = 2\sqrt{\overline{CM}^2-\overline{CP}^2} = 2a\frac{\sqrt{\sin^2 u-\sin^2(u-v)}}{\cos u},$$

som ændres til

$$MN = 2a\frac{\sqrt{\sin v\cdot\sin(2u-v)}}{\cos u}.$$

Fremdeles faas

$$\sin MCP = \frac{MP}{MC} = \frac{\sqrt{\sin v \,.\, \sin (2u - v)}}{\sin u}.$$

Disse Formler give

$$MN = 17' \; 9'',$$
$$\angle MCP = 71^0 \; 13' \; 24''.$$

De to Buer imellem M og N ere da

$$142^0 \; 26' \; 48'' \text{ og } 217^0 \; 33' \; 12'',$$

Sektorernes Forhold altsaa

$$\frac{142^0 \; 26' \; 48''}{217^0 \; 33' \; 12''} = \frac{21367}{32633}.$$

Projektionstegning.

I den vandrette Billedplan afsættes Sporet af en Plan og udenfor dette en Cirkel med en indskreven vilkaarlig Femkant. Planens andet Spor bestemmes saaledes, at Planen danner en Vinkel paa 60⁰ med den vandrette Plan, og derpaa drejes Cirklen med Femkanten om det vandrette Spor saaledes, at den kommer til at ligge i Planen. Begge Billeder (Projektioner) af Cirklen og Femkanten konstrueres.

Geometri.

1. Et plant Snit igjennem en af Grundfladens Kanter i et regulært Tetraeder afskjærer nærmest Grundfladen et nyt Tetraeder, hvis Volumen er en Trediedel af det hele. Hvor stor Vinkel danner Snittet med Grundfladen?

2. Efter at have bestemt et Punkt O indenfor en ligesidet Trekant, hvis Afstande fra Siderne forholde sig som $1 : \sqrt{m} : \sqrt{m}$, tages dette Punkt til Begyndelsespunkt for et retvinklet Koordinatsystem, hvis Abscisseaxe er parallel med den første Side (Afstanden a derfra betragtes som bekjendt), og hvis Ordinataxe altsaa falder paa Højden til den samme Side. Find dernæst det geometriske Sted for de Punkter M, som have Kvadratet paa deres Afstand

MP fra den første Side lig $\frac{1}{m}$ af Rektanglen af Afstandene MQ og MR fra de to andre Sider, disse Afstande tagne positive imod Trekanten[1]). Ex. 1. $m = 1$; 2. $m = \frac{1}{4}$.

Opl. 1. Sættes Tetraedrets Kant $= 1$, saa vil Snittet af den modstaaende Kant AO nederst afskjære $AE = \frac{1}{3}$, medens Trekantens Højde er $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kaldes Vinklen imellem OA og Grundfladen A, saa er $cos\, A = \sqrt{\frac{1}{3}}$, og den søgte Vinkel v bestemt ved

$$tg\ v = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{7},$$

hvortil svarer $\qquad v = 22^0\ 0'\ 5''$.

2. Trekanten kaldes ABC, AB parallel med Abscisseaxen, M's Projektioner paa AB, CA og CB betegnes P, Q og R. Man har da $m \,.\, MP^2 = MQ \,.\, MR$. Ligningerne for Siderne ere

for $AB \qquad y + a = 0,$

— $BC \qquad -x\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - y\,.\,\frac{1}{2} + a\sqrt{m} = 0,$

— $CA \qquad x\frac{\sqrt{3}}{2} - y\,.\,\frac{1}{2} + a\sqrt{m} = 0.$

Det søgte geometriske Sted har altsaa Ligningen

$$m(y+a)^2 = \left(x\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - y\,.\,\frac{1}{2} + a\sqrt{m}\right)\left(-x\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - y\,.\,\frac{1}{2} + a\sqrt{m}\right),$$

som reduceres til

$$\left(m - \frac{1}{4}\right)y^2 + \frac{3}{4}x^2 + a\,(2m + \sqrt{m})\,y = 0,$$

svarende til et Keglesnit med Toppunkt i Begyndelsespunktet.

$m = 1$ giver en Cirkel, idet $x^2 + y^2 + 4ay = 0$,

$m = \frac{1}{4}$ — — Parabel, — $3x^2 + 4ay = 0$.

---

[1]) Ved en Misforstaaelse var her kommet til at staa: Trekantens Sider.

4de Klasses Examen og almindelig Forberedelsesexamen.

Arithmetik.

1. A kjøber 3 Kasser Appelsiner for henholdsvis 51 fr. $98\frac{2}{3}$ c., 57 fr. 68 c. og 58 fr. $61\frac{1}{3}$ c., Omkostningerne beløbe sig til $33\frac{1}{3}$ pro Cent af Indkjøbsprisen. Han sælger dem for 10 Øre Stykket, hvorved han tjener $7\frac{1}{2}$ pro Cent. Hvor meget havde en Appelsin kostet ved Indkjøbet i danske Penge, og hvor mange var der i hver Kasse?

1 fr. = 100 c. = 75 Ø.

2. Undersøg, om den Række, hvis 3 første Led ere $\frac{p^2-1}{p}$, p, $\frac{p^2+1}{p}$, er en Differens- eller en Kvotientrække, naar p har en hvilken som helst Værdi.

Find det almindelige Led deri og Summen af n Led.

Vis, at Summen, naar $n = 3$, bliver 3 Gange det andet Led, og find den under den simpleste Form, naar $p = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{45}+\sqrt{27}-\sqrt{18}}$,

3. Af Ligningen $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}} = 3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ findes x.

Opl. 1. Paa hver Appelsin solgt for 10 Øre tjenes $7\frac{1}{2}$ pro Cent, saa faas

$$\frac{100}{107\frac{1}{2}} = \frac{x}{10}, \text{ altsaa } x = 9\tfrac{1}{3} \text{ Øre}$$

for Prisen paa hver i Indkjøb og Omkostninger. Disse ere $33\frac{1}{3}$ pro Cent af Indkjøbsprisen, altsaa

$$\frac{100}{133\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} = \frac{y}{9\frac{1}{3}}, \text{ som giver } x = 7 \text{ Øre}$$

i virkelig Indkjøbspris. I danske Penge kostede Kasserne

51 fr. $98\frac{2}{3}$ c. . $\frac{3}{4}$ = 38,99 Kr., deraf Antallet 557,

57 - 68 - . $\frac{3}{4}$ = 43,26 — — — 618,

58 - $61\frac{1}{3}$ - . $\frac{3}{4}$ = 43,96 — — — 628.

2. Da $\frac{p^2+1}{p} - p = p - \frac{p^2-1}{p} = \frac{1}{p}$, er det en Differensrække og kan ingen Kvotientrække være[1]). Det n'te Led er

$$p + (n-2)\frac{1}{p}, \qquad \text{Summen: } pn + (n-3)\frac{n}{2p}.$$

Summen af 3 paa hverandre følgende Led i en Differensrække er altid 3 Gange det mellemste, hvilket ses af

$$a - d + a + a + d = 3a.$$

Her er Summen altsaa

$$3p = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{45} + \sqrt{27} - \sqrt{18}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}},$$

der gjort rational i Nævneren bliver

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}.$$

3. Nævneren bortskaffes, saa at

$$x + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x} = 3\sqrt{x}.$$

Division med $\sqrt{x}$ gaar op og angiver Roden $x = 0$, som virkelig tilfredsstiller den givne Ligning, selv efter at højre Side er forkortet med $\sqrt{x}$. Derefter faas

$$\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x - 1} = 3$$

eller
$$\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} = 2.$$

Kvadreret og ordnet giver denne

$$2x - 5 = -2\sqrt{x^2 - x},$$

hvoraf igjen
$$16x = 25. \quad x = \frac{25}{16}.$$

Geometri.

1. To Sekanter, der danne en Vinkel paa 22° 50', skjære en Cirkel saaledes, at de Buer, der ligge udenfor Vinklen, ere 131° 50' og 112°. Hvor store ere de imellem Sekanterne liggende Buer? Drages Korderne til disse sidste Buer, hvor store ere da Vinklerne i den derved frembragte Firkant? Hvor store ere Vinklerne imellem dens Diagonaler.

---

[1]) Begge Dele ere kun muligt, naar alle tre Led ere lige store.

2. Der skal konstrueres en Cirkel med Radius r, som berører en given Vinkels ene Ben og af det andet afskjærer en Korde, som er $r\sqrt{3}$.

3. Omkredsene af en regelmæssig Ottekant og Tolvkant ere lige store, hver lig p; hvilken har størst Areal og hvor stor er Forskjellen?

Opl. 1. Af $x + y = 360^0 - (131^0\,50' + 112^0) = 116^0\,10'$
og $x - y = 2 . 22^0\,50' = 45^0\,40'$
findes $x = 80^0\,55'$ og $y = 35^0\,15$
for Buerne imellem Sekanterne. Derefter findes Firkantens Vinkler at være $83^0\,32\frac{1}{2}'$, $73^0\,37\frac{1}{2}'$ 96^0, $27\frac{1}{2}'$ og $106^0\,22\frac{1}{2}'$ og den spidse Vinkel imellem Diagonalerne $58^0\,5'$.

2. Da Korden $r\sqrt{3}$ har Afstanden $\frac{1}{2}r$ fra Centrum, faar det Ben, hvorpaa Korden ligger, ogsaa Afstanden $\frac{1}{2}r$ fra den dermed parallele Tangent. Denne kan altsaa konstrueres og af to Tangenter og Radius findes Cirklen let. Der kan faas to Opløsninger, idet der gives to Linier i Afstanden $\frac{1}{2}r$ fra det ene Ben, og disses Skjæringspunkter med en anden Linie parallel med det andet i Afstanden r bestemme det søgte Centrum. Det, som ligger inden for Vinklen kan altid bruges, det andet derimod ikke, naar Cirklen kun berører det andet Bens Forlængelse ud over Toppunktet. Da $r\sqrt{3}$ er Korden til 120^0, vil Cirklen afskjære $r\sqrt{3}$ af det ene Ben og berøre det andet i Vinklens Toppunkt, saafremt Vinklen netop er 60^0; er den større, falder Berøringspunktet udenfor Toppunktet, men hvis det er mindre, falder det indenfor. Der er altsaa to Opløsninger, saafremt Vinklen ikke er større end 60^0.[1])

3. Kaldes de omskrevne Cirklers Radier r og r_1 og deres fælles Omkreds p, saa har man

[1]) Da Opgaven intet har forlangt om dette Punkt, har man vistnok ingensteds taget Hensyn til, at det manglede; den gjennemgaaende Mangel deraf viser ogsaa, at det har ligget ud over billige Fordringer paa det Standpunkt.

$$p = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}} = 12r_1\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

altsaa $$r^2 = \frac{p^2}{64(2-\sqrt{2})},\quad r_1^2 = \frac{p^2}{144(2-\sqrt{3})}.$$

Derefter blive Arealerne

$$P_8 = 2r^2\sqrt{2} = \frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2},$$

$$P_{12} = 3r_1^2 = \frac{p^2}{16}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

Da $\frac{2+\sqrt{3}}{3} > \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, er $P_{12} > P_8$, og Forskjellen

$$P_{12} - P_8 = \frac{p^2}{16}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) = 0{,}0023\,.\,p^2.$$

Praktisk Regning.

1. Hos en Vexellerer byttes 500 fr., 1360 Dukater, 45 £ St. og 1040 Rubler i danske Penge; Vexellereren faar $\frac{1}{3}$ pro Cent, i Bytte betaler han saa stort et Beløb, som det er muligt, i Obligationer, hvoraf hver er 85 Kroner værd, Resten i rede Penge. Hvor mange Obligationer betaler han, hvor meget i rede Penge?
1 fr. = 75 Øre, 1 Dukat = 8 Kr. 45 Øre, 1 £ St. = 17 Kr. 90 Øre,
1 Rubel = 2 Kr. 70 Øre.

2. En hul Metalkugles ydre Overflade er a □', den indre b □'; hvor meget vejer den fyldt med Vand? 1 Kubikfod Vand vejer c ℔, og en Kubikfod af Metallet vejer d ℔.

Ex. $a = 4{,}192$, $b = 3{,}928$, $c = 62{,}047$, $d = 777{,}047$.

En Kugles Overflade er $4\pi r^2$, dens Kubikindhold $\frac{4}{3}\pi r^3$, naar r betegner dens Radius.

Opl. 1. Man faar	500 fr.	=	375 Kr.	„	Øre,
	1360 Duk.	=	11492 —	„	—
	45 £ St.	=	805 —	50	—
	1040 Rubl.	=	2808 —	„	—
I Alt			15480 Kr.	50	Øre,
hvori fragaar $\frac{1}{3}$ pro Cent			51 —	$60\frac{1}{6}$	—,
saa at Resten			15428 —	$89\frac{5}{6}$	Øre,

ddivideret med 85 giver 181 Obligationer
og Resten 43 Kr. $89\frac{5}{8}$ Øre.

2. Kaldes Radierne til de to KuglefIader R og r, saa er

$$R = \sqrt{\frac{a}{4\pi}},\quad r = \sqrt{\frac{b}{4\pi}}.$$

Kugleskallens Vægt er $\frac{4}{3}\pi\,(R^3 - r^3)\,d,$

Vandets Vægt $\frac{4}{3}\pi r^3 c,$

hvilket tilsammen udgjør

$$\frac{4}{3}\pi\,[dR^3 - (d-c)\,r^3],$$

og naar Tallene indføres

$$\frac{4}{3}\pi\left(777{,}047\sqrt{\left(\frac{4{,}192}{4\pi}\right)^3} - 715\sqrt{\left(\frac{3{,}928}{4\pi}\right)^3}\right).$$

Ved Hjælp af Logarithmer findes efterhaanden

$$\frac{4}{3}\pi\,(149{,}716 - 124{,}954) = \frac{4}{3}\pi\,.\,24{,}762$$

og endelig 103,724 ℔.

Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt. Juni 1885.

1. a) Konstruer en Cirkel, der rører to givne Cirkler, den ene i et givet Punkt.

b) To givne Linier skjære hinanden i A. Tegn en Cirkel gjennem A og et givet Punkt B, og som skjærer de givne Linier i to saadanne Punkter X og Y, at XY gaar gjennem et givet Punkt C.

Opl. a) foraarsager ingen Vanskelighed (jfr. Jul. Petersen: Methoder og Theorier. Opg. Nr. 277 eller Nr. 238).

b) Man kjender $\angle\, BXC$.

2. Fermat's og Wilson's Theoremer kunne udvides saaledes:

a) Dersom $\varphi(n)$ betegner Antallet af Tal, mindre end og primiske med n, og a er primisk med n, gaar n op i $a^{\varphi(n)} - 1$.

b) Dersom P betegner Produktet af de $\varphi(n)$ Tal, der ere mindre end og primiske med n, gaar n op i enten $P+1$ eller $P-1$.

Hvorledes bevises disse Sætninger?

Opl. a) Betegnes de $\varphi(n)$ Tal, som ere mindre end og primiske med n, ved $a_1, a_2 \ldots a_\varphi$ og multipliceres disse med et vilkaarligt a iblandt dem, saa ville Produkterne aa_i ved Division med n give lutter forskjellige Rester, som netop ville være alle Tallene a, eftersom $a . a_i \equiv b_1$ (*mod* n) og $aa_k \equiv b_k$ giver $b_i - b_k \equiv a(a_i - a_k)$, som hverken kan blive 0 eller et Multiplum af n. Følgelig faas ligesom ved Beviset for Fermat's Sætning $(a\,a_1) . (aa_2) \ldots (aa\varphi) \equiv a^{\varphi(n)} . a_1 a_2 \ldots a_\varphi \equiv a_1 a_2 \ldots a_\varphi$, eller $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ (*mod* n).

b) Ligningen $ax - ny = 1$ eller $ax \equiv 1$ (*mod* n) har altid en og kun en Værdi af x mellem 0 og n, naar a er primisk med n. Ogsaa x vil da være primisk med n, og da ifølge den udvidede Fermat'ske Sætning $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ (*mod* n), saa bliver $a^{\varphi(n)} . x \equiv x \equiv a^{\varphi(n)-1}$, hvorved x kan bestemmes, naar a er givet.

Vælge vi nu for a et Tal $< n$ og primisk med n, finde vi paa denne Maade et saadant Tal $x < n$ og primisk med n, at $ax \equiv 1$. a og x kunne være forskjellige eller lige store. I sidste Tilfælde er $a^2 \equiv 1$ *mod* (n); samtidig er ogsaa $(n-a)^2 \equiv 1$ (*mod* n), medens derimod $a(n-a) \equiv -1$ (*mod* n).

Betragte vi altsaa alle de med n primiske Tal $< n$, saa kunne alle de af disse, som ikke ere Rødder i Kongruensen $x^2 \equiv 1$ (*mod* n), tages sammen to og to, saa at Produktet af to sammenhørende give Resten 1. Produktet af alle disse Tal er altsaa $\equiv 1$ (*mod* n). Betragtes dernæst de Tal $< n$ og primiske med n, som ere Rødder i $x^2 \equiv 1$ (*mod* n), da kunne ogsaa disse samles parvis til Produkter af Formen $a(n-a)$, og hvert saadant Produkt giver Resten -1. $a = n - a$ er udelukket, naar $n > 2$, eftersom $a = \frac{n}{2}$ ikke er primisk med n. Altsaa vil det samlede Produkt P af alle Tallene $< n$ og primiske med n give en Rest, som enten er $+1$

eller — 1; det sidste Tilfælde vil indtræde, naar der er et ulige Antal Par af Rødder i Kongruensen $x^2 \equiv 1 \ (mod\ n)$.

Sætningen ses let ogsaa at gjælde for $n = 2$.

Er n et Primtal p, ere 1 og $p - 1$ de eneste Løsninger af $x^2 \equiv 1 \ (mod\ p)$; deraf faas Wilson's Theorem $[p-1] \equiv -1 \ (mod\ p)$.

Almindelig kan vises, at naar n er 2, 4, en Potens af et ulige Primtal (p^1 inklusive) eller det dobbelte deraf, saa er Produktet $P \equiv -1$; i alle andre Tilfælde er $P \equiv +1$.

Angaaende det fuldstændige Bevis for denne Sætning, som man plejer at betegne som den udvidede Wilson'ske Sætning og som skyldes Gauss, kunne vi henvise til Ramus' Elementær Algebra § 153.

3. I et Tetraeder har det ene Hjørne Siderne A, B, C, de modstaaende Kanter α, β, γ. Hvor stort er Tetraedrets Volumen, og hvor stor er Radius til den indskrevne Kugle?

Ex. $A = 70^0$, $B = 80^0$, $C = 100^0$,

$\alpha = 17{,}329$, $\beta = 19{,}715$, $\gamma = 21{,}0007$.

Opl. Afstanden fra Endepunktet af Kanten γ til C's Plan er bestemt ved $h = \gamma \sin A \sin B_1$, naar B_1 er Rumvinklen mellem A's og C's Planer. Man har da det søgte Rumfang

$$V = \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma \sin A \sin C \sin B_1.$$

Men ifølge en af Grundformlerne i den sfæriske Trigonometri er

$$\cos B_1 = \frac{\cos B - \cos A \cos C}{\sin A \sin C},$$

hvoraf B_1 kan findes. Derefter er Radius til den indskrevne Kugle $r = \frac{3V}{O}$, hvor O er Tetraedrets Overflade.

Indsættes de givne Værdier for Vinklerne, faas

$$\cos B_1 = \frac{2 \sin 10^0 \cos^2 35^0}{\sin 70^0 \cos 10^0}$$

og altsaa

$$\sin A \sin C \sin B_1 =$$

$$\sqrt{4 \sin^2 35^0 \cos^2 35^2 \cos^2 10^0 - 4 \cos^4 35^0 \sin^2 10^0}$$

$$= 2 \cos 35^0 \sqrt{\sin 45^0 \sin 25^0},$$

eller $$V = \frac{1}{3} \alpha\beta\gamma \,.\, \cos 35^0 \sqrt{\sin 45^0 \sin 25^0},$$

som stemmer med den almindelige Formel

$$V = \frac{1}{3}\,\alpha\beta\gamma\sqrt{\sin s \sin (s - A) \sin (s - B) \sin (s - C)},$$

hvor $$s = \frac{1}{2}(A + B + C).$$

Naar V er fundet, beregnes Tetraedrets Sidefladers Areal, den 4de simplest af Siderne, som findes ved de ikke logarithmiske Formler, der give den overskueligste Regning.

Regningen opstilles saaledes:

$$V = \frac{1}{3}\,\alpha\beta\gamma \cos 35^0 \sqrt{\sin 45^0 \sin 25^0}.$$

$\log \frac{1}{3} =$	9·52288
$\log \alpha =$	1·23878
$\log \beta =$	1·29480
$\log \gamma =$	1·32223
$\log \cos 35^0 =$	9·91336
$\frac{1}{2} \log \sin 45^0 =$	9·92475
$\frac{1}{2} \log \sin 25^0 =$	9·81297
$\log V =$	3·02977
$V =$	1070·95

$$O = \frac{1}{2}\beta\gamma \sin A + \frac{1}{2}\gamma\alpha \sin B + \frac{1}{2}\alpha\beta \sin C + G,$$

hvor G er Grundfladens Areal. Dette findes af de tre Sider a, b, c, som bestemmes ved Ligningerne

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$$
$$b^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cos B$$
$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos C.$$

$A = 70^0$	$\log \sin A = 9{\cdot}97299$	$\log \cos A = 9{\cdot}53405$
$B = 80^0$	$\log \sin B = 9{\cdot}99335$	$\log \cos B = 9{\cdot}23967$
$C = 100^0$	$\log \sin C = 9{\cdot}99335$	$\log \cos C = {}_n9{\cdot}23967.$

$\log \alpha^2 =$	2·47756	$\log \beta\gamma =$	2·61703
$\log \beta^2 =$	2·58960	$\log \gamma\alpha =$	2·56101
$\log \gamma^2 =$	2·64446	$\log \alpha\beta =$	2·53358
	7·71162		7·71162

$$\beta^2 = 388{\cdot}69 \qquad \gamma^2 = 441{\cdot}02$$
$$\gamma^2 = 441{\cdot}02 \qquad \alpha^2 = 300{\cdot}30$$
$$-2\beta\gamma\cos A = -283{\cdot}21 \qquad -2\gamma\alpha\cos B = -126{\cdot}39$$
$$a^2 = 546{\cdot}50 \qquad b^2 = 614{\cdot}93$$
$$\log a^2 = 2{\cdot}73759 \qquad \log b^2 = 2{\cdot}78882$$
$$a = 23{\cdot}378 \qquad b = 24{\cdot}798$$

$$\alpha^2 = 300{\cdot}30$$
$$\beta^2 = 388{\cdot}69$$
$$-2\alpha\beta\cos C = 118{\cdot}65$$
$$c^2 = 807{\cdot}64$$
$$\log c^2 = 2{\cdot}90722$$
$$c = 28{\cdot}419$$

$$G = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

	$s = 38{\cdot}298$	$\log s = 1{\cdot}58318$
$a = 23{\cdot}378$	$s - a = 14{\cdot}920$	$\log(s-a) = 1{\cdot}17377$
$b = 24{\cdot}798$	$s - b = 13{\cdot}500$	$\log(s-b) = 1{\cdot}13033$
$c = 28{\cdot}419$	$s - c = 9{\cdot}879$	$\log(s-c) = 0{\cdot}99471$
$2s = 76{\cdot}595$	$76{\cdot}597$	$2\log G = 4{\cdot}88199$
		$G = 276{\cdot}05$

$$\log \tfrac{1}{2}\beta\gamma \sin A = 2{\cdot}28899 = \log 194{\cdot}53$$
$$\log \tfrac{1}{2}\gamma\alpha \sin B = 2{\cdot}25333 = \log 179{\cdot}20$$
$$\log \tfrac{1}{2}\alpha\beta \sin C = 2{\cdot}22590 = \log 168{\cdot}23$$
$$G = 276{\cdot}05$$
$$O = 818{\cdot}01$$

$$\log 3 = 0{\cdot}47712$$
$$r = \frac{3V}{O}. \qquad \log V = 3{\cdot}02977$$
$$-\log O = -2{\cdot}91276$$
$$\log r = 0{\cdot}59413$$
$$r = 3{\cdot}9276.$$

4. To Cirkler have Radierne r og r_1 og Centerlinien c. Fra et Punkt P trækkes der til hver af de to Cirkler en Tangent; Røringspunkterne ere F og F_1. Hvilket er det geometriske Sted for P, naar

$$PF + PF_1 = 2a?$$

Angaaende denne Opgaves Løsning henvises til »Tidskr. f. Math.« 1877 S. 10, idet samme Opgave blev stillet til Adgangsexamen i Juni 1876.

Bemærkning af Redaktionen.

Skjønt vi ikke som sædvanlig have modtaget Løsningerne af de sidst anførte Opgaver fra den, der har stillet dem, have vi dog ikke villet undlade at meddele udførlige Løsninger af de to Opgaver 2 og 3; ved den sidste have vi til yderligere Oplysning om, hvorledes selve Talregningen hensigtsmæssigst bør opstilles, meddelt denne in extenso. Det er os ikke bekjendt, om der fordres Benyttelsen af 7-cifrede Logarithmer, men vi antage, at 5-cifrede ere tilstrækkelige, og have derfor nøjedes med at gjennemføre Regningen med disse, uagtet Opgivelsen af 6 Cifre for γ kunde tyde paa, at der krævedes en større Nøjagtighed.

Samtidig skulle vi til de nævnte to Opgaver tillade os at knytte et Par kritiske Bemærkninger. Det første Spørgsmaal i Opgave 2 slutter sig saa umiddelbart til det i Lærebøgerne anførte Bevis for Fermat's Theorem, at det med Billighed kan forlanges besvaret af enhver vel forberedt Examinand. Dette kan derimod næppe siges om det andet. Vi have i det ovenfor givne Bevis saa nøje som muligt holdt os til Texten i Beviset for selve Wilson's Sætning, saaledes som dette er gjengivet i Dr. Jul. Petersens Arithmetik og Algebra. Om end vi intet Steds deri have gjort Brug af andre Forudsætninger end dem, der maatte være Eleverne bekjendte fra Lærebogens Bevis, og Opgaven derfor, navnlig naar den udvidede Fermat'ske Sætning i Forvejen var gjennemgaaet, vilde egne sig fortræffelig til Brug ved Undervisningen for at fæstne i Erindringen Beviset for det Wilson'ske Theorem, saa bliver Forholdet et andet, naar den forelægges Eleverne ved en Examensprøve. Thi allerede Wilson's Sætning hører til de Ting, som paa Grund af det uvante i Bevismaaden pleje at falde Eleverne vanskelige, og til Gjennemførelse af Beviset for den udvidede Sætning kræves ikke blot, at alle Detaillerne af hint Bevis haves paa rede Haand, men ogsaa, at man netop faar Blik for, at af Rødderne i

Kongruensen $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ netop a og $n - a$ skulle parres sammen. Vel sker der ogsaa i Beviset for Wilson's Sætning noget lignende med Tallene 1 og $p - 1$, men de fleste ville her vel simpelthen betragte Faktoren 1 som værende uden Betydning og $p - 1$ som for sig givende Resten $- 1$, saaledes at der herfra ikke erholdes noget Vink om det, hvorpaa det i Opgaven kommer an, nemlig Sammenparringen af a og $n - a$.

At den nævnte Opgaves sidste Del virkelig har været for vanskelig, turde finde en Bekræftelse i den Omstændighed, at den efter Forlydende ikke skal være bleven løst af nogen af Examinanderne. Imidlertid ville vi dog, da det første Spørgsmaal ligger fuldstændig indenfor Elevernes Rækkeevne, ikke ubetinget forkaste, at det andet medtages ved en Examen som Adgangsexamen ved Polyteknisk Læreanstalt, hvor Opgavestilleren selv har en væsentlig Indflydelse paa Bedømmelsen af alle Examinandernes Arbejder, og altsaa ved Censuren kan tage fornødent Hensyn til Opgavernes Vanskelighed. Ogsaa den Maade, hvorpaa Eleven tager fat paa en vanskelig Opgave, kan give et ikke uvigtigt Moment til Bedømmelsen af hans Modenhed.

Derimod ville vi bestemt hævde, at Opgave Nr. 3 ikke burde have været stillet, eller ialfald kun i en noget modificeret Skikkelse. Som det vil ses af den meddelte Løsning, kræves der nemlig til Bestemmelsen af Volumen Benyttelsen af en af Grundformlerne i den sfæriske Trigonometri. Selv om disse kunne ønskes læste, og vistnok ogsaa sædvanlig blive det, kan dette dog ikke strengt taget fordres, eftersom der i den kgl. Resolution af 17. Juli 1857 kun kræves »Plantrigonometri« til Polyteknisk Adgangsexamen. Det bliver derfor altid misligt at fordre Anvendelsen af sfæriske Formler i en saa stor Opgave som den foreliggende, og dobbelt misligt bliver det, naar de skulle benyttes ved Besvarelsen af Opgavens første Spørgsmaal. Thi derved føres Eleven uvilkaarlig til at anvende sin Tid paa dette i Stedet for strax at give sig i Lag med det andet, til hvis Besvarelse han ialfald er i Stand til at give et væsentligt Bidrag, nemlig Beregningen af Tetraedrets Overflade. Da ovenikjøbet den nævnte Resolution udtrykkelig opstiller den Fordring,

at af de fire skriftlige Opgaver »idetmindste en udelukkende skal give Lejlighed til at vise Færdighed i praktiske Beregninger«, bliver det fuldstændig utilstedeligt at gjøre Beregningsopgavens Løsning afhængig af en Formel, som ikke kan fordres lært, og hvis Udledelse ikke er ganske let. Opgaven kommer derved endog i direkte Strid med Examensfordringerne. Bortset fra, at Opgaven er temmelig vidtløftig, vilde vi have fundet den ret passende, hvis der som første Spørgsmaal var opstillet Beregningen af Tetraedrets Overflade, som andet Beregningen af Volumen, eventuelt den indskrevne Kugles Radius. Hint vilde da kunne fordres fuldstændig besvaret af alle, og en flink Examinand vilde endog kunne gjennemføre Løsningen fuldstændig, medens man ved Opgaven, som den foreligger, maatte være forberedt paa, at selv de dygtigste udtømte deres Kræfter paa en mislykket Besvarelse af det første Spørgsmaal uden engang at faa Lejlighed til fuldt ud at vise, hvad de kunde magte af det andet, navnlig om de vare i Besiddelse af Færdighed i Talregning.

Ved Beregningsopgaver burde overhovedet altid iagttages den Regel, at de theoretiske Udviklinger, som nødvendig kræves, før Regningen kan udføres, reduceres til det mindst mulige; derimod er der intet til Hinder for, at der bagefter kommer et Spørgsmaal af overvejende theoretisk Karakter.

(J. P. Gram).

LØSNING AF OPGAVERNE 373, 495 OG 518.*)

373. Hvorledes maa a, b, c og d være beskafne, naar alle Rødder i

$$a(x+c)^n = b(x+d)^n$$

skulle være reelle?

---

[1]) Endvidere have vi modtaget Løsninger af Opgaverne 399, 490, 512, 514, 515, som ville blive meddelte i næste Hefte. Red.

Den forelagte Ligning kan løses, idet man finder

$$\frac{x+d}{x+c} = \sqrt[n]{\left|\frac{a}{b}\right|} \cdot 1^{\frac{1}{n}}.$$

Sætte vi nu $\sqrt[n]{\left|\frac{a}{b}\right|} \cdot 1^{\frac{1}{n}} = u$, er

$$\frac{x+d}{x+c} = u,\ x + c = \frac{d-c}{u-1},$$

og alle Punkterne u ligge paa en Cirkel med Radius $\sqrt[n]{\left|\frac{a}{b}\right|}$ og Centrum i Nulpunktet, hvoraf følger, at ogsaa Punkterne x maa ligge paa en Cirkel (specielt en ret Linie). Naar alle x skulle være reelle, maa denne skjære den reelle Axe i alle Punkterne x eller, naar $n > 2$, helt falde sammen med Axen. Opgaven reduceres derved til at bestemme a, b, c og d saaledes, at x gjennemløber den reelle Axe, naar u gjennemløber Cirklen $|u| = \sqrt[n]{\left|\frac{a}{b}\right|}$, idet u og x antages variable og forbundne ved ovenstaaende Ligning. For at x skal gjennemløbe en ret Linie, er det nødvendigt og tilstrækkeligt, at (u) gaar gjennem Punktet 1, hvoraf følger $|a| = |b|$ som den første Betingelse. Endvidere skal den Vinkel, som de rette Linier (x) eller $(x + c)$ danne med den reelle Axe, være Nul, og da denne Vinkel er bestemt ved

$arg\,(x + c) = arg\,(d - c) - arg\,(u - 1)$, for $(u - 1)$ uendelig lille, maa

$$arg\,(d-c) - \frac{\pi}{2} = 0, \text{ eller } arg\,(d-c) = \frac{\pi}{2}.$$

Den tredje og sidste Betingelse faas ved at bemærke, at den rette Linie (x) skal gaa gjennem Nulpunktet, hvoraf følger $\left|\frac{d}{c}\right| = 1$ eller $|d| = |c|$.

Naar vi sætte $c = \alpha + \beta i$, $d = \gamma + \delta i$, (α, β, γ og δ reelle), ere Betingelserne for, at den forelagte Ligning for $n > 2$ har alle Rødder reelle, ifølge det ovenstaaende:

$$|a| = |b|,\ \alpha = \gamma,\ \beta = -\delta.$$

Tilfældene $n = 2$ og $n = 1$ frembyde ingen Interesse.

495. Beregn $\int_0^{l2} \frac{x e^x}{e^x - 1} dx$. (Mathesis T. II).

Ved at indføre en ny variabel ved Substitutionen $x = l(1+y)$, transformeres Integralet til

$$\int_0^1 \frac{l(1+y)}{y} dy.$$

Nu kan $\frac{l(1+y)}{y}$ for $|y| < 1$ udvikles i Potensrækken

$$1 - \frac{1}{2} y + \frac{1}{3} y^2 - \frac{1}{4} y^3 + \ldots,$$

og da en saadan Potensrække som bekjendt er ligelig konvergent indenfor sit Konvergensomraade, er man berettiget til at integrere den fra 0 til $y < 1$, ved at integrere hvert Led for sig, hvorved findes

$$\int_0^y \frac{l(1+y)}{y} dy = y - \frac{1}{2^2} y^2 + \frac{1}{3^2} y^3 - \frac{1}{4^2} y^4 \ldots.$$

Denne Potensrække konvergerer imidlertid endnu for $y = 1$, og man har derfor ifølge en bekjendt Sætning af Abel og Dirichlet

$$\lim_{y=1} \int_0^y \frac{l(1+y)}{y} dy = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{2}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right)$$

eller

$$\int_0^1 \frac{l(1+y)}{y} dy = \frac{\pi^2}{12}.$$

Man kunde ogsaa strax have integreret den første Række fra 0 til 1; men det vilde da have været nødvendigt at vise, at den var ligelig konvergent i Intervallet $0 \leqq y \leqq 1$.

518. Udvikler man alle Leddene i den harmoniske Række i Decimalbrøk, altsaa

$$\frac{1}{1} = 1{,}000\,000\,000\ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}500\,000\,000\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0,333\,333\,333\ldots$$

$$\frac{1}{4} = 0,250\,000\,000\ldots$$

o. s. v.

og adderer for sig Værdierne af de n'te Decimaler, saa nærme disse Summer sig med voxende n til Grænsen $l.10 = 2{,}3025\ldots$ Bevis dette.

(Meissel).

Naar $E(x)$ betegner det største hele Tal, som er indeholdt i x, indser man let, at den n'te Decimal i Decimalbrøken for $\frac{1}{s}$ er

$$10^{-n} E\left(\frac{10^n}{s}\right) - 10^{-n+1} E\left(\frac{10^{n-1}}{s}\right).$$

Summen af de n'te Decimaler er

$$10^{-n} \sum_{s=1}^{10^n} E\left(\frac{10^n}{s}\right) - 10^{-n+1} \sum_{s=1}^{10^{n-1}} E\left(\frac{10^{n-1}}{s}\right),$$

idet Summationstegnene ere udstrakte til alle Værdier af s, der ikke gjøre de enkelte Led i Summerne lig med Nul.

Nu har Dirichlet bevist en Sætning, hvoraf let udledes, at

$$\sum_{s=1}^{N} E\left(\frac{N}{s}\right) = 2 \sum_{s=1}^{\nu} E\left(\frac{N}{s}\right) - \nu^2, \text{ hvor } \nu = E(\sqrt{N}).$$

Et meget simpelt Bevis for denne Sætning er givet af Dr. Julius Petersen, som har bemærket, at den søgte Sum kan betragtes som Antallet af hele Kvadrater mellem de retvinklede Koordinataxer og Hyperblen med Ligningen $xy = N$, idet Planen tænkes delt i Kvadrater med Siden 1, og at Formlen da følger af Kurvens Symmetri med Hensyn til dens Axe.

Af den anførte Sætning og af Uligheden

$$0 \leqq \frac{N}{s} - E\left(\frac{N}{s}\right) < 1$$

udledes, at Summen af Værdierne af de n'te Decimaler er lig med

$$2 \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{s} - 2 \sum_{s=1}^{\nu'} \frac{1}{s} - \frac{\nu^2}{10^n} + \frac{\nu'^2}{10^{n-1}} + \delta$$

$$= 2 \sum_{s=\nu'+1}^{\nu} \frac{1}{s} - \frac{\nu^2}{10^n} + \frac{\nu'^2}{10^{n-1}} + \delta,$$

hvor $-10^{-n}\nu < \delta < 10^{-n+1}\nu'$, og $\nu = E(10^{\frac{n}{2}})$, $\nu' = E(10^{\frac{n-1}{2}})$.
Bemærke vi nu, at $\underset{x=\infty}{Lim}\frac{E(x)}{x} = 1$, vil $\underset{n=\infty}{Lim}\frac{\nu^2}{10^n}$ og $\underset{n=\infty}{Lim}\frac{\nu'^2}{10^{n-1}}$ begge være lig 1, $\underset{n=\infty}{Lim}\,\delta = 0$, og den søgte Grænseværdi altsaa lig med

$$2\underset{n=\infty}{Lim}\sum_{\nu'+1}^{\nu}\frac{1}{s}.$$

For at finde denne Grænseværdi uden at benytte Integraler behøver man blot at gaa ud fra Uligheden

$$\frac{1}{s+1} < l\left(1+\frac{1}{s}\right) < \frac{1}{s} \text{ eller } 0 < \frac{1}{s} - l\frac{s+1}{s} < \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1},$$

der viser, at

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s} - l(s+1)$$

for voxende s nærmer sig en bestemt og positiv Grænseværdi, hvoraf umiddelbart følger, at

$$Lim\,2\sum_{\nu'+1}^{\nu}\frac{1}{s} = 2\,Lim\,l\frac{\nu+1}{\nu'+1} = 2l\sqrt{10} = l\,10.$$

Ovenstaaende Bevis lader sig Ord til andet benytte, naar vi i Stedet for Tital-Systemet havde benyttet et andet Talsystem med Grundtallet p, kun vilde da den søgte Grænseværdi være blevet lp.

(J. L. W. V. Jensen).

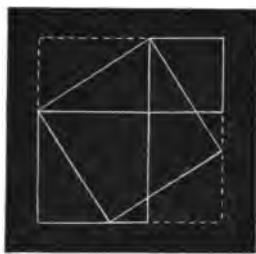
MINDRE MEDDELELSER.

I. Den pythagoræiske Læresætning.

For denne have vi fra Hr. cand. theol. Fenger i Ringkjøbing modtaget til Gjennemsyn en lang Række forskjellige Beviser. De ere af meget forskjellig Art, nogle af dem bero paa simple Omlægninger af Figurdelene, andre ligne mere det sædvanlige euklidiske. Uagtet Forfatteren, som ikke er i Besiddelse af videre gaaende mathematiske Kundskaber, ved Opstillingen af disse Beviser ofte har lagt en betydelig Opfindsomhed for Dagen, kan det dog ikke siges,

at den store Mængde af dem giver noget egentlig nyt, og vi have derfor ikke fundet tilstrækkelig Anledning til at optage dem her i Tidsskriftet, saa meget mere som der for et Par Aars Tid siden af en tydsk Forfatter er udgivet en Samling af c. 60 Beviser af lignende Art.

Der er dog to af de angivne Beviser, som vi finde Anledning til at omtale. Det første er følgende: Trekantens Katheter være a og b, Hypotenusen c. Tegner man først Kvadratet paa $a + b$ (se Fig.), saa er dette lig $a^2 + b^2 + 2$ Rektangler ab. Afskjærer man nu af det nævnte Kvadrat 4 Trekanter kongruente med den givne, og saaledes beliggende som Figuren viser, saa faas netop c^2. Men de 4 Trekanter ere tilsammen det samme som de to Rektangler, altsaa er $a^2 + b^2 = c^2$.



Det andet Bevis vilde faas ved paa Figuren at bøje de 4 trekantede Flige ind over Hypotenusens Kvadrat. Der vilde da i Midten af dette fremkomme et Kvadrat $(a - b)^2 = c^2 - 2ab$, hvoraf følger $a^2 + b^2 = c^2$.

Intet af disse Beviser er nyt. Det sidste findes allerede hos den indiske Forfatter Bhascara (i det 12te Aarhundrede e. Chr.), og det første er det samme som Bretschneider i »Die Geometrie und die Geometer vor Euklid« opstiller som et, Pythagoræerne oprindelig kunne have benyttet. Det vides nemlig fra Proklos' Kommentar, at det bekjendte »Vejrmøllebevis«, som findes hos Euklid, skyldes denne. Sætningen var derimod bekjendt forud og turde med Rette bære sit Navn den Pythagoræiske, idet vistnok enkelte specielle Tilfælde, navnlig Anvendelsen af Trekanten med Siderne 3, 4 og 5 til Konstruktion af rette Vinkler, kjendtes af Ægypterne, men den fuldstændige Sætning først antages at være begrundet af Pythagoras eller hans nærmeste Disciple.

Der er virkelig meget gode Grunde til at antage, at Pythagoræernes Udledelse ikke har afveget synderlig fra den her omtalte, ved Siden af hvilken de ogsaa kunne have kjendt Bhascara's Bevis, hvis Slægtskab dermed er fremhævet ved ovenstaaende

Sammenstilling. De i begge anvendte Hjælpemidler henhøre nemlig under de Arealoperationer, som benyttes i Euklids anden Bog. Disses hyppige Anvendelse og store Betydning i den græske Mathematik, hvor de tildels traadte i Stedet for vor Algebra, er paavist i første Afsnit af »Keglesnitslæren i Oldtiden«, og at de ere udviklede og bleve anvendte allerede af Pythagoræerne, fremgaar af Eudemos' ved Proklos opbevarede Meddelelse, at de derunder indbefattede saakaldte Fladeanlæg skyldes Pythagoræerne.

De fremsatte Beviser knytte sig endog direkte til Sætningerne 4 og 7 i Euklids 2. Bog og de dertil hørende Figurer, som under geometrisk Form udtrykke, at

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab.$$

Paa at disse Figurer kunne have været anvendte som her formodet, tyder en Form, hvori Sætningerne endog to Gange fremtræde hos Diofantos, nemlig følgende: I enhver retvinklet Trekant vedbliver Hypotenusens Kvadrat at være et Kvadrat, naar man derfra trækker eller dertil lægger det dobbelte Produkt af Katheterne. Denne Sætning, som Diofant anfører og anvender i taltheoretiske Øjemed, kan efter den rimeligste Opfattelse af Diofants Stilling blandt de græske Mathematikere godt være en nedarvet Regel fra den græske Geometris første Tid.

Endnu en Støtte for Bretschneiders Antagelse angaaende det først anførte kan hentes fra Plato's Dialog Menon. I denne benytter Sokrates nemlig til at lade Menons Slave finde ud af, hvorledes man skal konstruere et Kvadrat dobbelt saa stort som et givet, en Figur, som netop er den samme som Bretschneiders vil blive i det specielle Tilfælde, hvor Katheterne ere lige store.

H. G. Zeuthen.

II. Om Funktionen $\sqrt[x]{x}$.

Vor C. F. Degen har haft for Skik at forsyne sine Bøger med skrevne Bemærkninger. Iblandt saadanne har jeg paa Smudsbladet af Grüson's Oversættelse af Lagrange Théorie des fonctions analytiques fundet først nogle Talværdier, nemlig

$$»\log \sqrt[\pi]{\pi} = 0{,}1582477$$

$$\sqrt[\pi]{\pi} = 1{,}43962 \text{ meget nær,}$$

$$\left.\begin{aligned} \log \pi^\pi &= 1{,}5617541 \\ \pi^\pi &= 36{,}454748 \end{aligned}\right\}$$ [1]

$$\log e^e = 1{,}1805347984«,$$

og derefter følgende Bemærkning:

$$»\sqrt[e]{e} = 1{,}444667861 \text{ er Maximum af } \sqrt[x]{x}.$$

Der gives altsaa, naar $x > e$, altid et $y < e$, saa at

$$\sqrt[y]{y} = \sqrt[x]{x}, \text{ saaledes er } \sqrt[2]{2} = \sqrt[4]{4}.«$$

Den almindelige Bestemmelse af disse sammenhørende Værdier af x og y, som give Funktionen ligestore Værdier, sker let saaledes:

Af $$\sqrt[x]{x} = \sqrt[y]{y}$$

faas $$\frac{l.x}{x} = \frac{l.y}{y},$$

altsaa $$l.x = z.l.y \text{ og } x = z.y,$$

følgelig $$l.z + l.y = z.l.y.$$

Derved udtrykkes de sammenhørende Værdier af x og y saaledes ved den vilkaarlige Størrelse z

$$y = z^{\frac{1}{z-1}}, \quad x = z^{\frac{z}{z-1}}.$$

Man kunde for z have taget $\frac{1}{z}$, hvilket kun bevirker en Ombytning af x og y. $z = 2$ og $z = \frac{1}{2}$ give Degens Exempel. $z = 1$ giver den ubestemte Form $\sqrt[0]{1}$, hvis sande Værdi netop er Maximumsværdien.

Det heri liggende Stof til Opgaver har jeg benyttet to Gange, nemlig i Januar og Juni 1883 til udvidet Forberedelsesexamen, jfr. Tidskriftet for 1883, S. 25—26 og 167, men det vil formentlig kunne gjøre yderligere Tjeneste ved den daglige Undervisning.

Adolph Steen.

---

[1]) Urigtig. $\log \pi^\pi = 1{,}56184239 = \log 36{,}4621596$.

(J. G.)

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund, Lund.

A. Th. Daug, Upsala.

H. Gyldén, Stockholm.

Sophie Kowalevski, Stockholm.

C. J. Malmsten, Upsala.

G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes, Christiania.

O. J. Broch, Christiania.

S. Lie, Christiania.

L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz, Kjøbenhavn.

J. Petersen, Kjøbenhavn.

H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Side

Om Potenser af uendelige og endelige Rækker og om Rækker for omvendte Funktioner. Af *F. Buchwaldt* 65

Et Theorem om netformige Figurer. Af *Axel Thue* 102

Examensopgaver 106

Mindre Meddelelser 125

B

573

TIDSSKRIFT

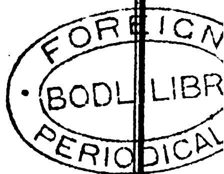
FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.



FEMTE RÆKKE.

Tredje Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1885.

FEMTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

OM EN DUALISME I DEN ABSOLUTE GEOMETRI.

(AF AXEL THUE).

I den absolute Plangeometri behøve, som bekjendt, to rette Linier ikke at skjære hinanden hverken i noget endeligt eller uendelig fjernt Punkt.

Dette har da til Følge, at Sætninger, der i Almindelighed kunne bevises uden Parallelaxiomets Hjælp og som udtale Egenskaber ved rette Liniers Skjæringspunkter, kunne blive illusoriske, idet Skjæringspunkterne forsvinde.

Man kunde naturligvis ogsaa her som i den sædvanlige Geometri gjøre Sætningerne almengjældende ved at indføre de imaginære Punkter; men vore absolute Beviser kunde da aldrig blive af en rent synthetisk Natur, eftersom jo disse imaginære Begreber kun maatte have en analytisk Definition, hvis man ikke vilde indføre nye Axiomer.

Af vore Sætninger kan der dog i det Tilfælde, da de ere illusoriske paa Grund af en særegen Lov, udledes nye, der udtale Egenskaber ved reelle Begreber.

Man ombytte blot Ordene: »Punkt paa ret Linie« med »Normal paa ret Linie«.

Før vi imidlertid gaa over til at levere en analytisk Begrundelse af dette vort Theorem, ville vi synthetisk verificere det for nogle enkelte Tilfælde.

Have saaledes to rette Linier intet Punkt fælles (Skjæringspunkt), da have de, som bekjendt, en fælles Normal.

Denne Normal eller Dobbeltnormalen, som vi kalder den, erstatter altsaa Begrebet Skjæringspunkt og omvendt.

Da jeg ej har set noget korrekt Bevis herfor, skal jeg kortelig søge at godtgjøre Rigtigheden deraf.

Nedfælder man nemlig fra et Punkt p paa den ene af to hinanden ikke skjærende rette Linier en perpendikulær q ned paa den anden, saa varierer q, naar p bevæger sig kontinuerlig. Dersom

nu q ved p's Bevægelse i en bestemt Retning, efter at have aftaget, igjen begynder at voxe eller omvendt, da indses, at man herved maatte faa to Værdier af q, der vare lige store, eller at den perpendikulære q, der halverede Stykket mellem de to omtaltes Fodpunkter, maatte staa lodret paa begge de givne Linier.

Hvis ovenstaaende ikke finder Sted, da vilde q ved p's Bevægelse i en bestemt Retning stedse aftage og nærme sig en vis Grænseværdi k, der dog efter vor Antagelse om de to rette Linier maa være større end Nul.

Ved følgelig at lade p bevæge sig et uendeligt Stykke fra sin Udgangsstilling fik man herved en Firkant, i hvilken, som det let ses, lod sig konstruere et uendeligt Antal kongruente retvinklede Triangler, hvis ene Kathete ikke behøvede at være mindre end k, og hvis anden var ganske vilkaarlig. Men heraf flød da igjen Rigtigheden af Parallelaxiomet; idet Vinkelsummen i hver af vore kongruente Triangler i saa Fald maatte være lig to rette[1]).

Herved er da Satsen bevist, eftersom dens Modsætning leder til Selvmodsigelse.

Perpendikulærerne paa Midten af et Triangels Sider ville, hvis to af dem skjære hinanden, have et fælles Punkt.

Finder derimod Skjæring ikke Sted, da paastaa vi, at de tre Perpendikulærer have en fælles Normal.

Trianglets Hjørner være a, b og c samt u Dobbeltnormalen til Perpendikulærerne paa Midten af Siderne ab og bc. Normalerne fra Trianglets Hjørner ned paa u ses nu paa Grund af de fremkomne kongruente Figurer at være lige store.

Men heraf følger jo, at Perpendikulæren paa Midten af den tredie Side ac ogsaa maa staa lodret paa u.

Vi skulle se, at foranstaaende Sætning blot er et specielt Tilfælde af en langt almindeligere Lov.

Naar n Planer p_1 p_2 .... p_n gjennem en ret Linie s overskjæres af en Plan q, der ikke træffer den rette Linie, da ville de fremkomne n Skjæringslinier u_1 u_2 ... u_n have en fælles Normal.

---

[1]) Se Tillægget Pag. 142.

Er nemlig v Dobbeltnormalen til Linien s og en af Linierne u, da staar, som man ser, den gjennem v paa s lodrette Plan x perpendikulært paa vore $n+1$ givne Planer.

Men heraf følger, at alle de n Skjæringslinier $u_1\ u_2 \ldots u_n$ maa staa lodret paa Planen x, eller hvad der bliver det samme, lodret paa Skjæringslinien mellem Planerne x og q.

Af den her beviste Sats ser man, at vor Transformation af Punkt til Normal gjælder alle saadanne deskriptive Sætninger, der kunne bevises absolut ved perspektivisk Projektion.

Vi gaa derpaa over til den analytiske Behandling af det opstillede Theorem, idet vi til den nærmere Forstaaelse af efterfølgende henvise til Tillægget.

I det efterfølgende faar man desuden Brug for de saakaldte hyperbolske Funktioner, der i den absolute Geometri spiller den samme Rolle som de goniometriske Funktioner i den Euklidiske.

De vigtigste Formler angaaende disse Funktioner ere følgende:

$$Sin\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad Cos\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$Sin\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots.$$

$$Cos\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots.$$

$$Cos\ x + Sin\ x = e^x$$

$$Cos^2\ x - Sin^2\ x = 1,$$

$$Sin\ (x \pm u) = Sin\ x\ Cos\ u \pm Cos\ x\ Sin\ u,$$

$$Sin\ x = \frac{1}{i}\ sin\ xi,\quad Cos\ x = cos\ xi,\quad (i = \sqrt{-1}),$$

$$Tg\ x = \frac{Sin\ x}{Cos\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \text{o. s. v.}$$

For Sammenlignings Skyld anføres for de goniometriske Funktioner Formlerne:

$$sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots.$$

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

Af absolut geometriske Formler kan man særlig mærke sig:

$$Sin\,\frac{a}{k} = Sin\,\frac{c}{k}\,.\,sin\,A, \tag{1}$$

$$cos\,A : sin\,B = Cos\,\frac{a}{k}, \tag{2}$$

$$Cos\,\frac{c}{k} = Cos\,\frac{a}{k}\,.\,Cos\,\frac{b}{k}, \tag{3}$$

$$Tg\,\frac{a}{k} = Sin\,\frac{b}{k}\,.\,tg\,A, \tag{4}$$

$$Tg\,\frac{a}{k} = Tg\,\frac{c}{k}\,.\,cos\,B, \tag{5}$$

hvor A, B og C ere Vinklerne i et ved C retvinklet Triangel, a, b, c henholdsvis Vinklernes modstaaende Sider, òg k en Konstant.

Endvidere har man, naar p og p' ere to modstaaende og v en tredie Side i en Firkant, hvor baade p's og v's hosliggende Vinkler ere rette, at:

$$Tg\,\frac{p'}{k} = Tg\,\frac{p}{k}\,.\,Cos\,\frac{v}{k}. \tag{6}$$

Vi ville nu udlede den rette Linies Ligning i de sædvanlige Polarkoordinater og betegne disse med r og φ.

Af Formel (5) faar man da, idet q betegner den rette Linies Afstand fra Polen samt α denne Afstands Vinkel med Axen, direkte, at:

$$Tg\,\frac{q}{k} = Tg\,\frac{r}{k}\,.\,cos\,(\alpha - \varphi)$$

eller

$$cos\,(\alpha - \varphi) = Tg\,\frac{q}{k}\,.\,Cot.\,\frac{r}{k}, \tag{I}$$

der altsaa forestiller Liniens Ligning i de ordinære Punktkoordinater.

Vi fremstille saa Liniens Ligning i, hvad man kan kalde Normalkoordinater og forstaa herved den paa vor Linie variable Normals Parametre q' og α', der ere at opfatte paa samme Maade som den givne Linies Bestemmelsesstykker q og α.

I den Firkant, der dannes ved q og q' samt ved den givne rette Linie og den paa samme variable Normal være n og m henholdsvis q's og q''s modstaaende Sider.

Man drage en Perpendikulær s ned paa q fra Skjæringspunktet

mellem q' og n og faar da ifølge de opstillede Formler, idet man ved u forstaar det Stykke af q, der afskjæres ved s og m, at

$$Tg\,\frac{n}{k} = Tg\,\frac{u}{k}\,.\,Cos\,\frac{m}{k}, \tag{7}$$

$$Tg\,\frac{s}{k} = Tg\,\frac{m}{k}\,.\,Cos\,\frac{u}{k}, \tag{8}$$

$$Tg\,\frac{s}{k} = Sin\,\frac{q-u}{k}\,.\,tg\,(\alpha - \alpha'), \tag{9}$$

$$Sin\,\frac{s}{k} = Sin\,\frac{q'}{k}\,sin\,(\alpha - \alpha'), \tag{10}$$

$$Cos\,\frac{q}{k}\,.\,Cos\,\frac{m}{k} = Cos\,\frac{q'}{k}\,.\,Cos\,\frac{n}{k}. \tag{11}$$

Ved nu mellem disse Ligninger at borteliminere de fire Hjælpestørrelser $\frac{m}{k}$, $\frac{n}{k}$, $\frac{s}{k}$ og $\frac{u}{k}$ erholdes gjennem en noget besværlig Regning følgende Eliminationsligning:

$$cos\,(\alpha - \alpha') = Tg\,\frac{q}{k}\,.\,Tg\,\frac{q'}{k}. \tag{II}$$

Denne Ligning forestiller altsaa foruden Betingelsesligningen forat to rette Linier skulle staa lodrette paa hinanden, tillige den givne rette Linies Ligning i Normalkoordinater.

Af Ligningerne (I) og (II) ser man nu Rigtigheden af vort Theorem.

De kunne nemlig begge bringes paa Formen:

$$A\,sin\,x + B\,cos\,x = Cy, \tag{III}$$

hvor A, B og C ere Konstanter, der udelukkende ere bestemte ved den givne rette Linies Parametre q og α.

Skulde nu til Ex. n Ligninger af ovenstaaende Form tilfredsstilles af det samme Værdisystem x, y, saa maatte dette give sig tilkjende ved en Betingelsesligning mellem de n Sæt af Konstanterne A, B og C. Men denne Betingelsesligning kan jo, som man ser, interpreteres paa to Maader, alt eftersom x og y opfattes som Punktkoordinater eller som Normalkoordinater.

I første Tilfælde udtrykker Betingelsesligningen, at de n rette Linier, der afbilde de n givne Ligninger, gaa gjennem et reelt

eller imaginært Punkt, i det andet, at de have en fælles imaginær eller reel Normal.

Har man derfor om n rette Linier, der ere bestemte ved en variabel kontinuerlig Figur, bevist absolut, at de gaa gjennem et Punkt, hvis reel Skjæring finder Sted, da ville de, dersom saa ikke er Tilfældet, alle have en fælles reel Normal.

Man indser nemlig gjennem en simpel Betragtning, at den Betingelsesligning, der finder Sted mellem de n rette Liniers variable Konstanter, fremdeles maa vedblive at gjælde, efterat Skjæringen forsvinder, paa Grund af vor bestemmende Figurs forudsatte Kontinuitet.

Lad os oplyse foran staaende ved et Par Exempler.

Ved et temmelig simpelt Ræsonnement ser man, at Højderne i et Triangel, hvis Hjørner halverer et andets Sider, skjære hverandre i et Punkt, dersom dette ydre Triangel kan indskrives i en Cirkel.

Den Ligning, der finder Sted mellem Højdernes Parametre maa nu, eftersom jo vort Triangel kan variere kontinuerlig mellem visse Grænser, saaledes at Sætningen finder Sted, altid existere, selv om Trianglet antager en hvilken som helst Form.

Højderne maa altsaa i det Tilfælde, at de ikke skjære hverandre, have en fælles reel Normal.

Hvis de tre Sider, der danne vort Triangel, ikke alle skjære hinanden, faar man af denne Sætning en Mængde forskjellige Corollarer, idet man erstatter Skjæringspunkt med Begrebet Dobbeltnormal og erindrer, at Højderne analytisk talt altid skjære hverandre paa Grund af Figurens Kontinuitet.

Ere saaledes samtlige Hjørner i Trianglet forsvundne, og der ved Indførelsen af Dobbeltnormalerne dannes en egentlig Sexkant, hvor alle Vinklerne altsaa ere rette, da ville de tre Par modstaaende Siders Dobbeltnormaler gaa gjennem et Punkt.

Er den fremkomne Figur en uegentlig Sexkant, ɔ: naar to af Trianglets Sider falde paa hver sin Kant af den tredie, da ville,

hvis hvert Par modstaaende Sider har et Skjæringspunkt, alle tre ligge paa en ret Linie o. s. v.

En Række lignende Sætninger faar man ogsaa ved at anvende vor Transformation paa saadanne udartede Triangler med Hensyn paa Vinklernes Halveringslinier, Medianerne, Højderne paa Midten af Siderne o. s. v.

Saaledes faar man, da Vinklernes Halveringslinier i en ordinær Trekant skjære hverandre i et Punkt, at i en sædvanlig Sexkant, hvor alle Vinklerne ere lige store, der ville Perpendikulærerne paa Midten af Siderne skjære hverandre tre og tre i to Punkter.

Er Sexkanten en uegentlig, da ville de to Grupper af de sex Midtpunktsperpendikulærer hver have en fælles Normal.

Af Ligning (III) ser man altsaa, at naar n rette Linier have et fælles analytisk Skjæringspunkt, da have de ogsaa en fælles Normal. Men heraf følger, at der til hvert Punkt i Planen maa svare en bestemt ret Linie og til hver ret Linie et bestemt Punkt.

Den til Punktet svarende rette Linie er saaledes til Ex. Dobbeltnormalen til to vilkaarlige gjennem Punktet gaaende rette Linier.

Dette Resultat kan man imidlertid ogsaa let erholde uden at ty til Ligning (III).

Af Formlerne (2) og (3) faar man nemlig, at i vort før omtalte retvinklede Triangel er

$$Cos\,\frac{a}{k} = cos\,A : sin\,B$$

og

$$Cos\,\frac{c}{k} = Cos\,\frac{a}{k}\,.\,Cos\,\frac{b}{k}.$$

Følgelig bliver, naar s og p henholdsvis er Side og Grundlinie i et ligebenet Triangel, hvor Topvinklen er α, og β Størrelsen af de to andre, idet Højden drages som Hjælpelinie:

$$Cos\,\frac{p}{2k} = cos\,\frac{\alpha}{2} : sin\,\beta$$

og

$$Cos\,\frac{s}{k} = cot\,\frac{\alpha}{2}\,cot\,\beta.$$

Sætter man nu her $\beta = \frac{\pi}{2}$, saa faas:

$$Cos\,\frac{p}{2k} = cos\,\frac{\alpha}{2} = cos\,\frac{p}{2k}\,i$$

og
$$Cos\,\frac{s}{k} = 0 = cos\,\frac{s}{k}\,i.$$

Da s skal være lig p, naar $\alpha = \beta$, og p skal være lig Nul, naar de to Sider s ere sammenfaldende eller $\alpha = 0$, saa faar man følgelig:

$$p = i\alpha k,$$

$$s = \frac{\pi}{2}\,ki.$$

Af den første af disse to Ligninger følger, at Vinklen mellem to rette Linier er proportional med Dobbeltnormalen til samme; og af den anden, at Dobbeltnormalens Afstand fra de rette Liniers Skjæringspunkt er uafhængig af Vinklen α samt konstant lig $\frac{\pi}{2}\,ki$.

Enhver ret Linie gjennem Toppunktet for Vinklen α staar altsaa lodret paa Dobbeltnormalen p, eller med andre Ord: have n rette Linier et fælles Punkt, da have de ogsaa en fælles Normal.

Man ser endvidere af ovenstaaende, at den rette Linie er at betragte som en Cirkel med Radius $\frac{\pi}{2}\,ki$, hvilket imidlertid er en allerede bekjendt Sandhed. Til hver ret Linie svarer altsaa et bestemt Punkt og omvendt. Ligeledes svarer, ser man, to rette Liniers Skjæringspunkt til Forbindelseslinien mellem deres tilordnede Punkter og omvendt.

Vi kunde ogsaa have udledet vort Theorem ved at anstille Betragtninger over visse Forholde paa Kuglen.

Gaar man nemlig ud fra, som bevist, at Parallelaxiomet gjælder for uendelig smaa Figurer, samt at to Planers Bøjningsvinkel er ganske uafhængig af Toppunktets Beliggenhed paa Planernes Skjæringslinie, da faar man, at den sfæriske Trigonometri gjælder uafhængig af Parallelaxiomet, eftersom altsaa de optrædende Vinkler i et sfærisk Triangel blive uforandrede, naar Kuglens Radius varierer, medens til Ex. Storcirkelplanerne gjennem Siderne beholde sin Stilling uforandret, og lig Vinklerne, idet Radien forsvinder.

Men følgelig vil Trigonometrien paa Kuglen kun adskille sig fra den plane absolute Trigonometri ved visse højere indgaaende Enheder eller Konstanter.

Saaledes faar man til Ex. for det retvinklede Triangel paa Kuglen:

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b$$

eller
$$Cos\,\frac{c}{i} = Cos\,\frac{a}{i}\,.\,Cos\,\frac{b}{i}, \tag{12}$$

hvor altsaa a, b, c ere Vinkler.

Man kan imidlertid ogsaa give Siderne Betydning af Længder, idet det erindres, at Omkredsen af en Cirkel med Radius r er lig

$$2\pi k\, Sin\,\frac{r}{k}.$$

Den til Side a etc. svarende Vinkel bliver da, naar r er Kuglens Radius, lig $\dfrac{a}{k\,Sin\,\frac{r}{k}}$, og følgelig kan Formel (12) ogsaa skrives:

$$Cos\,\frac{c}{ik\,Sin\,\frac{r}{k}} = Cos\,\frac{a}{ik\,Sin\,\frac{r}{k}}\,.\,Cos\,\frac{b}{ik\,Sin\,\frac{r}{k}},$$

hvor a, b, c nu ere visse Længder.

Vi ville saaledes se, at de sfærisk trigonometriske Formler kun adskille sig fra de plane absolute derved, at Konstanten $ik\,Sin\,\frac{r}{k}$ træder i Stedet for Konstanten k, eller at blot Konstanten i træder i Stedet for k, naar rigtignok Siderne have Betydning af Vinkler.

Heraf følger, at alle de Sætninger, der kunne bevises absolut i Planen, og hvor Konstanten k ingen Indflydelse faar, maa ogsaa gjælde paa Kuglen.

Men paa Kuglen ser man ved en direkte Kongruensbetragtning, at to Storcirkler stedse have en paa dem begge lodret Storcirkel, hvis sfæriske Afstand fra de to oprindelige Storcirklers ene Skjæringspunkt er aldeles uafhængig af Vinklen mellem disse.

Have altsaa n Storcirkler et fælles Punkt, da have de ogsaa en fælles Normal.

Dette maatte man naturligvis ogsaa have kunnet komme til ved at anvende den sfæriske Trigonometri, og følgelig vil ovenstaaende Sætning, som man uden Vanskelighed indser, ogsaa gjælde i Planen.

Af vort Theorem, der udtaler, at imaginært Punkt paa ret Linie kan ombyttes med reel Normal til Linien og omvendt, flyder nu flere ejendommelige Undersætninger.

Som et Exempel herpaa kan nævnes følgende Sats:

Hvis n Par rette Linier kunne bevises absolut at have sine Skjæringspunkter beliggende paa en ret Linie, da vil, naar den bestemmende Figur har antaget et saadant Udseende, at Linierne i intet af de n Par skjære hinanden, de n Pars Dobbeltperpendikulærer enten skjære hinanden i et Punkt eller ogsaa alle have en fælles Normal.

Dersom Linierne i m af Parrene ikke skjære hinanden, da vil disses Dobbeltnormaler staa lodret paa en ret Linie, der gaar gjennem de øvrige $n - m$ Pars Skjæringspunkter.

Er altsaa $m < n$, da kan de omtalte Dobbeltnormaler aldrig skjære hinanden i noget reelt Punkt.

Vi gaa saa over til at undersøge, hvorledes det har sig i Rummet, naar Skjæringspunktet mellem Plan og ret Linie eller naar Skjæringslinien mellem to Planer forsvinder.

Vi paastaa, at naar to Planer ikke skjære hinanden, da gives der en og kun en ret Linie, der staar lodret paa dem begge.

Man overskjære de to Planer med en vilkaarlig tredie Plan.

Gjennem de to fremkomne Skjæringsliniers Dobbeltnormal lægges saa en fjerde Plan lodret paa den sidstnævnte; hvilken fjerde Plan, som man ser, maa staa lodret paa begge de to givne, og følgelig vil Dobbeltnormalen til Skjæringslinierne mellem den fjerde og de to først nævnte Planer staa lodret paa begge disse.

Vi kunne ogsaa let bevise dette paa en noget anden Maade.

Til Planernes Skjæringslinie, den være reel eller imaginær, svarer nemlig i hver Plan et bestemt Punkt. Forbindelseslinien mellem disse to Punkter vil da staa lodret paa de to givne Planer, eftersom man jo ved at forbinde to Punkter n_1 og n_2 paa Pla-

nernes Skjæringslinie med dennes to tilordnede Punkter p_1 og p_2, vil faa frem de to ligebenede, ved Grundlinien retvinklede Triangler $p_1 n_1 p_2$ og $p_1 n_2 p_2$; idet

$$p_1 n_1 = p_1 n_2 = p_2 n_1 = p_2 n_2 = \frac{\pi}{2} ki.$$

Da altsaa alle de fire Vinkler: $n_1 p_1 p_2$, $n_2 p_1 p_2$, $n_1 p_2 p_1$ og $n_2 p_2 p_1$ ere rette, maa følgelig Linien $p_1 p_2$ staa lodret paa begge de givne Planer.

Heraf kan man imidlertid drage den Slutning, at der til hver ret Linie i Rummet svarer en anden ret Linie, hvilke to Linier have den Egenskab, at Afstanden fra et vilkaarligt Punkt paa den ene til et vilkaarligt Punkt paa den anden er konstant lig $\frac{\pi}{2} ki$.

Dersom tre Planer ikke skjære hverandre i noget reelt Punkt, da gives der, paastaa vi, en paa dem alle lodret Plan.

Denne Sætning have vi egentlig bevist en Gang tidligere. Man indser den imidlertid ogsaa let paa en anden Maade.

Afsættes nemlig fra de tre Planers analytiske Skjæringspunkt et Stykke $\frac{\pi}{2} ki$ paa Planernes Skjæringslinier, da staar jo den Plan, der gaar gjennem disse Stykkers ikke sammenfaldende Endepunkter, lodret paa de tre givne Planer paa Grund af de dannede rette Vinkler.

Til hvert Punkt i Rummet svarer der saaledes en bestemt Plan og omvendt.

Man vil, i Analogi med, hvad der fandt Sted i Planen, finde: at absolut beviste Sætninger, der udtale deskriptive Egenskaber ved Planers Skjæringslinier eller Skjæringspunkter, ville, naar de blive illusoriske, idet de omtalte Begreber forsvinde reelt, fremdeles gjælde, naar man blot ombytter Ordene: Punkt i en Plan med Normalplan paa Plan og ret Linie i en Plan med normal ret Linie paa Plan.

Saaledes vil f. Ex. til de uendelig mange fælles Punkter paa to Planers Skjæringslinie svare de uendelig mange gjennem to

hinanden ikke skjærende Planers Dobbeltnormal gaaende paa disse lodrette Planer.

Lignende Sætninger som ovenstaaende vil man naturligvis ogsaa kunne udlede for Rum med flere end to og tre Dimensioner; men vi skulle indskrænke os til det allerede anførte.

Lad os imidlertid til Slutning give en liden Anvendelse af det foran gaaende, idet vi synthetisk ved Hjælp af Rumbetragtninger — en Methode, som undertiden er særdeles hensigtsmæssig — ville bevise følgende plane Sætning:

Dersom ingen af Linierne i de tre Par ydre fælles Tangenter til tre Cirkler skjære hinanden, da vil de tre Tangentpars Dobbeltnormaler enten gaa gjennem et Punkt eller ogsaa have en fælles Normal.

Lad os forudskikke et Par Bemærkninger:

Drejes den ene af to hinanden ikke skjærende rette Linier om den anden, fremkommer en Flade, som man kan kalde en Cylinder, og de to rette Liniers Dobbeltnormal beskriver da samtidig en Plan lodret paa denne Cylinders Generatricer.

Man ser endvidere paa Grund af Kongruensaxiomet, at hvis en saadan Cylinder tangeres af to Planer, da vil Cylinderens Normalplan enten staa lodret paa de to Tangentplaners Skjæringslinie, hvis de have en saadan, eller ogsaa gaa gjennem de to Planers Dobbeltnormal, ifald de altsaa ikke skjære hinanden.

Gjennem vore tre givne Cirkler som Storcirkler lægge man saa tre Kugler og til disse Kugler igjen tre tangerende Cylindre.

Disse Cylindre ses nu at tangere de to ydre Fællestangentplaner til de tre Kugler, og følgelig maa Cylindrenes tre Normalplaner alle staa lodret paa de to Tangentplaners Skjæringslinie, hvis en saadan existerer, eller ogsaa, hvis saa ej er Tilfælde, alle gaa gjennem de to Tangentplaners Fællesnormal.

Men heraf følger igjen direkte vor plane Sætning.

Tillæg.

For at lette Forstaaelsen af nærværende Afhandling for dem af Tidsskriftets Læsere, der maatte være ubekjendte med den absolute Geometris Væsen, skal jeg efter Anmodning af Redaktionen saa vidt mulig give et i korte Træk orienterende Tillæg.

Alle mathematiske Sætninger kunne, vide vi, føres tilbage til visse Grundsandheder, Axiomerne, der umiddelbart opfattes som selvindlysende.

Giver man nu disse Axiomer en saa præcis og klar Udtale, at de ikke slippe en bort mellem Hænderne, viser det sig blandt andet, at de ordne sig i visse Grupper; idet der mellem enkelte bestaar særegne Forbindelser, medens andre derimod ere ganske uafhængige af hverandre.

Vi have saaledes til Exempel, at Sætningen om Trianglets Vinkelsum opfattet som Axiom ikke kan bevises ved lutter todimensionale Kongruensbetragtninger.

Lod nemlig dette sig gjøre, maatte Summen af Vinklerne i ethvert sfærisk Triangel ogsaa være to rette, eftersom de samme Kongruenssætninger finde Sted paa Kuglen som i Planen, naar Storcirklen der tænkes at svare til Planens rette Linie.

Man ser heraf let, at der ikke bestaar nogen Sammenhæng mellem Parallel- og Kongruensaxiomet i den ovenfor nævnte Forstand.

En Geometri, der er opbygget paa den Forudsætning, at Parallelaxiomet er fejlagtigt, kaldes gjerne absolut eller »ikke euklidisk« og leder ved Anvendelse af de sædvanlige Axiomer ikke til Selvmodsigelser [1]).

Den deler sig i to væsentlige Afdelinger, alt eftersom den rette Linie antages at være ubegrænset eller endelig og i sig selv tilbageløbende.

Holder man sig til den første Forudsætning, saa indses, at Summen af Vinklerne i et Triangel er mindre end to rette. Da

---

[1]) Man tænker sig undertiden her Parallelaxiomet blot ikke anvendt, hvorved denne Geometri ikke kommer i Strid med den sædvanlige, men kun bliver mere almindelig end denne.

dette imidlertid allerede før er vist i Tidsskriftet (1883, S. 7), skal jeg ikke gaa nærmere ind herpaa.

En Konsekvens af foran staaende Sætning er følgende. Det er umuligt om et vilkaarligt Antal givne uden for hinanden liggende kongruente Triangler altid at konstruere en n-Kant, hvor n er et givet Tal.

Var nemlig dette muligt, vilde man ved at forbinde de givne Trianglers Hjørner indbyrdes og med n-Kantens faa denne delt i $p + q$ Triangler, hvor p var Antallet af de givne. Betegnes nu disses Vinkelsum med $p(2R - s)$, Vinkelsummen af de q Triangler med $2qR - r$, samt n-Kantens med $2R(n-2) - v$, da erholdes:

$$p(2R - s) + 2qR - r = 2R(n-2) - v + 4R.3p,$$

hvilken Ligning, idet man efter Eulers Formel for den fremkomne netformige Figur har: $q = 5p + n - 2$, reduceres til:

$$p.s = v - r$$

eller

$$s = \frac{v - r}{p}.$$

Da p her er vilkaarlig, s positiv eller Nul og v en endelig Størrelse, maa s være Nul, hvilket imidlertid vilde føre til Parallelaxiomets Rigtighed, eftersom dette, hvad Legendre først har vist, finder Sted, hvis Summen af Vinklerne i ét Triangel er to rette.

Staa to Linier pq og rs begge lodrette paa Linien sq og er $pq = rs$, da vil ifølge Sætningen om Trekantens Vinkelsum rp voxe med pq.

Heraf maa da igjen følge, hvis de sædvanlige mekaniske Grundsætninger holde Stik, at et Legeme, der er sat i Bevægelse, af sig selv vil standse, idet der i samme ved Bevægelsen opstaar en Stramning. De mekaniske Love maa følgelig forandres adskilligt ved Antagelsen af Parallelaxiomets Fejlagtighed.

Af den tidligere beviste Sætning følger, at et Triangel, der omslutter et andet, har en mindre Vinkelsum end dette.

Lader man derfor Siden til Ex. i et ligesidet Triangel variere, saa varierer herved Vinklen entydig, og man vilde paa denne Maade faa et absolut Maal for Længder, der altsaa lod sig maale ved Vinkler.

Fastholder man Rummets Kontinuitet i den absolute Geometri, ser man, at naar et Triangels tre Sider nærme sig kontinuerlig mod Nul, da nærmer Vinkelsummen sig kontinuerlig mod to rette, idet denne, naar Siderne gaar gjennem et Punkt, netop er to rette.

Det lader sig ogsaa paavise, hvilket ovenstaaende maa give en stærk Formodning om, at den euklidiske Geometri gjælder uafhængig af Parallelaxiomet for Figurer med uendelig smaa Dimensioner.

I den sædvanlige Geometri ledes man til Antagelsen af et uendelig fjernt Punkt paa den rette Linie; her bliver man nødt til at antage to saadanne Punkter. Tænkes den rette Linie at være endelig, gives der ingen reelle uendelig fjerne Punkter.

Ved Hjælp af rent elementære Midler kunne vi paa Basis af Sætningen om Trekantens Vinkelsum udlede en hel Række andre Uligheder [1]). Saaledes lod sig blandt andet bevise, at Hypotenusens Kvadrat i et retvinklet Triangel er større end Summen af Kathetemes Kvadrater; men vi ville lade os nøje med det allerede anførte og strax søge at fremstille virkelige positive Relationer af gjennemgribende Betydning.

Jeg vil da gaa den samme Vej, som er fulgt af J. Frischauf i hans »Elemente der absoluten Geometrie«, hvoraf efterfølgende er et kort Uddrag [2]).

Det er klart, at den euklidiske Geometri maa gjælde paa en Kugleflade med uendelig stor Radius, den saakaldte Grænseflade, hvor den rette Linie er erstattet ved de uendelige Storcirkler, der kaldes Grænselinier [3]). Man indser desuden let, at alle Grænseflader og alle Grænselinier maa være kongruente.

Vi ville nu bevise følgende Sætning. Sinus til en af de spidse

---

1) Se A. Thue: »Et bidrag til den absolute geometri«. Arch. for Math. og Naturvidenskab 1885.

2) Foruden ovennævnte Værk kan ogsaa henvises til F. Klein. Über die sogenante nichteuklidiske Geometrie. Math. Annalen. Bd. 4.

3) Af Formlen for Arealet af et sfærisk Triangel udtrykt ved Kuglens Overflade og dets Vinkelsum ses nemlig, da denne Formel kan udledes uafhængig af Parallelaxiomet, at Vinkelsummen for alle endelige Triangler maa være to rette.

Vinkler i et retvinklet Triangel er lig Forholdet mellem de Cirkelperiferier, hvis Radier henholdsvis ere Vinklens modstaaende Kathete og Hypotenusen.

Trianglet være pqr, og q den rette Vinkels Toppunkt. Gjennem p oprejses paa Trianglets Plan en Perpendikulær, fra hvis ene uendelig fjerne Punkt u der trækkes rette Linier til Trianglets Hjørner. Disse Linier bestemme nu paa Grænsefladen gjennem r og om u som Centrum et Triangel $p'q'r$, hvor

$$\angle p'q'r = R \text{ og } \angle q'p'r = \angle qpr.$$

Men nu er:

$$sin\ p = sin\ p' = \frac{2\pi rq'}{2\pi rp'} = \frac{(rq)}{(rp)},$$

idet man ved (x) forstaar Omkredsen af en Cirkel med Radius x.

Der være givet en Grænsebue n og en Normal til samme af Længden p. Gjennemløber nu dennes Fodpunkt Buen n, saa beskriver dens andet Endepunkt ogsaa en Grænsebue m, og man ser, at Forholdet mellem disse Grænsebuer blot afhænger af deres Afstand p. Er derfor k den Afstand, som to Grænselinier i samme Plan maa have, for at deres Forhold skal være e, finder man Forholdet, naar Afstanden er p, ved at sammenligne begge Forhold med Forholdet mellem to Grænselinier, hvis Afstand er et Maal for k og p, idet man altsaa anvender Sætningen, at Forholdet mellem to Grænsebuer, afskaarne paa den ovenfor angivne Maade, er konstant, naar Afstanden mellem dem er det.

Man finder Forholdet, naar Afstanden er p, at være:

$$e^{\frac{p}{k}}.$$

k gives her gjerne en saadan Værdi, at e betyder Grundtallet i det naturlige Logarithmesystem.

Ere ab og cd to ligeløbende Grænsebuer og ac og bd lodrette paa begge, da er $\frac{ab}{cd} = \frac{sin\ acb}{sin\ cbd}$.

Nedfældes nemlig paa bd og ac Perpendikulærerne cf og be, faas:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{2\pi\, ab}{2\pi\, cd} = \frac{(be)}{(cf)} = \frac{sin\ acb\,(bc)}{sin\ cbd\,(bc)} = \frac{sin\ acb}{sin\ cbd}.$$

Afstanden fra et Punkt q til en given ret Linie være p. Vi ville søge den Vinkel $f(p)$, som p danner med Forbindelseslinien mellem q og et af de uendelig fjerne Punkter v paa den givne Linie.

Idet u er p's Fodpunkt, være q' det til q med Hensyn til Linien uv symmetriske Punkt. Man har da, naar v' er et af de uendelig fjerne Punkter paa p, at Perpendikulærerne qr og $q'r'$ ned paa vv', der jo maa ligge i endelig Afstand fra u, henholdsvis halvere Vinklerne $\angle vqq'$ og $\angle vq'v$.

Om v som Centrum trækker man gjennem q og q' en Grænselinie, der skjærer vv' i h. Dernæst om v' som Centrum Grænselinier gjennem r, r' og h, hvilke træffe qq' i s, s' og h' samt endelig Grænselinier gjennem q og q', der skjære vv' i n og n'.

Nu har man:

$$qs = nr = rh = sh',$$

og paa samme Vis $$q's' = s'h',$$

eller heraf $$p = qs - q's'.$$

Endvidere er:

$$\frac{qn}{sr} = e^{\frac{qs}{k}} = sin\, R : sin\, \tfrac{1}{2} f(p)$$

og $$\frac{q'n'}{s'r'} = e^{\frac{q's'}{k}} = sin\, R : sin\, \tfrac{1}{2}\, (2R - f(p)).$$

Heraf faar man da endelig:

$$cotg\, \tfrac{1}{2} f(p) = e^{\frac{p}{k}}.$$

Forholdet mellem en vilkaarlig Kurve paa en Flade, der er det geometriske Sted for alle Punkter med en konstant Afstand h fra en given Plan og denne Kurves Projektion ned paa Planen, er, som man ser, blot afhængig af h.

Men heraf følger, at i Firkanten $pqrs$, hvor Vinklerne p, q og r er rette, der har man, at Forholdet $(sr):(pq)$ er konstant, naar ps er det; hvilket indses ved blot at betragte den Omdrejningsfigur, der fremkommer ved Firkantens Rotation om qr. Vi have imidlertid videre:

$$(sr) : (pq) = \sin sqr\,(sq) : \sin qsp\,(sq) = \sin sqr : \sin qsp$$

$$= 1 : \sin f(sp) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{sp}{k}} + e^{-\frac{sp}{k}}\right) = Cos\,\frac{sp}{k},$$

hvilke sidste Ligninger erholdes ved at lade pq voxe over alle Grænser og samtidig erindre, at vort Forhold forbliver konstant.

Vi have altsaa her bevist følgende mærkelige Sats. Naar en Kathete i et retvinklet Triangel er konstant, da er Forholdet mellem den modstaaende Vinkels cosinus og den hosliggende spidse Vinkels sinus ogsaa konstant og lig den oven staaende Funktion af Katheten.

Er mnp et ved n retvinklet Triangel og q et Punkt paa np, da erholdes let af de ovenfor fremstillede Relationer:

$$(np) : (nq) = \cot p : \cot q.$$

Forbindes nu et af de uendelig fjerne Punkter v paa mn med p og q, gjennem hvilke der desuden om v som Centrum lægges Grænselinier, skjærende mn i p' og q', da haves:

$$pp' : qq' = (np) : (nq) = \cot p : \cot q$$

og $$p'p : qq' = \cot f\,(np) : \cot f\,(nq),$$

eller $$pp' : \cot f\,(np) = qq' : \cot f(nq) = c = \text{konst.},$$

eller $$pp' = c\,.\,\cot f(np).$$

Nu nærmer, som man ser, Brøken:

$$\frac{pp'}{np} = \frac{c \cot f\,(np)}{np}$$

sig med forsvindende np mod Enheden, hvoraf man gjennem en lille Regning, idet Værdien af $\cot \tfrac{1}{2} f\,(np)$ erindres, faar

$$c = k.$$

Altsaa bliver $$pp' = k \cot f\,(np),$$

eller $$(np) = 2\pi pp' = 2\pi k \cot f\,(np),$$

eller, idet np sættes lig x og Værdien for $\cot f\,(np)$ indføres:

$$(x) = \pi k\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Ved Hjælp af den her fundne Formel for Cirkelperiferiens Længde udtrykt ved dens Radius og de tidligere fundne Sætninger kan man da uden videre udlede alle i den absolute Trigonometri forekommende Relationer, hvorved ethvert absolut geometrisk Problem er væsentlig reduceret til et rent algebraisk.

EN UDLEDELSE AF DUHAMEL'S KONVERGENS-BETINGELSE.

(Et Brudstykke af mine Forelæsninger[1]).

(AF H. G. ZEUTHEN).

Cauchy's Konvergenskriterium bliver ubrugeligt, naar

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

I dette Tilfælde kan man benytte følgende Omskrivning af Rækken, som vi foreløbig lade være endelig:

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 + u_2 + \ldots . u_n \\ &= (u_1 - u_2) + 2(u_2 - u_3) + 3(u_3 - u_4) + \ldots \\ &\qquad + (n-1)(u_{n-1} - u_n) + nu_n. \end{aligned}$$

Her ville vi først for at vinde en Række til Sammenligning antage, at overalt

$$m\left(\frac{u_m}{u_{m+1}} - 1\right) = \alpha \text{ eller } \frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{m}{m+\alpha},$$

hvorved Rækken bliver til

$$u_1\left(1 + \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1.2}{(1+\alpha)(2+\alpha)} + \frac{1.2.3}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} + \ldots\right).$$

Man udleder da af de to Former for Rækken, at

$$s_n - nu_n = \alpha(s_n - u_1)$$

eller

$$s_n = \frac{\alpha u_1 - nu_n}{\alpha - 1}.$$

Da s_n ikke kan blive negativ (idet alle Leddene i Rækken antages positive), medfører $\alpha > 1$, at $\alpha u_1 > n . u_n$. Heraf følger, at for $\alpha > 1$ s_n vedbliver at være endelig, naar n voxer i det uende-

[1]) Ved denne Betegnelse ønsker jeg her, og hvor jeg senere maatte finde Anledning til at bruge den, at angive, at jeg ikke bringer noget videnskabelig nyt. Den benyttede Omskrivning er anvendt i Prof. Oppermann's simple Bevis for Duhamel's Konvergensbetingelse (Tidsskr. f. Mathem. 1873. S. 145. Min Udledelse er kun en saadan Omformning af hans, hvorved jeg tillige faar et Grænseudtryk for Resten.

lige, eller at Rækken er konvergent, og heraf følger atter[1]) at $Lim\ nu_n = 0$.

Man faar da for den uendelige Række

$$s = Lim\ s_n = \frac{\alpha u_1}{\alpha - 1}.$$

Den Fejl, der begaas ved at standse med Leddet u_n, er

$$s - s_n = \frac{n \,.\, u_n}{\alpha - 1}.$$

Det fundne Resultat finder Anvendelse paa enhver Række, hvorom man véd, at for $n > r$ bliver overalt

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > \alpha > 1, \text{ og altsaa } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+\alpha}.$$

Man finder nemlig da

$$s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$
$$< u_n\left(\frac{n}{n+\alpha} + \frac{n\,(n+1)}{(n+\alpha)\,(n+\alpha+1)} + \cdots\right).$$

Denne Grænseværdi er imidlertid den samme Rest som ovenfor beregnedes. Altsaa er

$$s - s_n < \frac{n \,.\, u_n}{\alpha - 1}.$$

Idet tillige u_n er mindre end det tilsvarende Led i den med u_r begyndende Række af den ovenfor beskrevne Art, bliver $Lim\ n \,.\, u_n = 0$, altsaa $Lim\ (s - s_n) = 0$.

Heraf følger, at en Række bliver konvergent, naar $Lim\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ (Duhamel's Konvergensbetingelse); thi er denne opfyldt, kan man, naar α er en vilkaarlig Størrelse mellem 1 og den fundne Grænse, altid bestemme r saa stor, at for $n > r$ altid $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > \alpha > 1$.

Naar $Lim\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$ bliver $Lim\ \frac{n u_n - (n+1)\, u_{n+1}}{u_{n+1}}$

---

[1]) Dette var vist forud i Forelæsningen ved Sammenligning med den harmoniske Række.

< 0, $n \cdot u_n$ voxer altsaa med n og følgelig er $Lim\ nu_n > 0$. Rækken bliver altsaa divergent.

Er $Lim\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1$, maa Konvergensen undersøges ad andre Veje.

INDFØRELSEN AF REGNING MED DECIMALBRØKER I DANMARK.

(AF S. A. CHRISTENSEN).

Decimalbrøker vare som Brøker med Nævnere 10, 100 o. s. v. kjendte og brugte med Fordel, inden man tænkte paa den særlige Opskrivningsmaade. Allerede i det 12te Aarhundrede har man et Tilfælde af deres Anvendelse ved Uddragning af Kvadratrødder. Dette gjentager sig hyppigere og hyppigere i det 15de og 16de Aarhundrede, saaledes at det gik over i Regnebøgerne; vi nævne her Rudolff's[1]) og Ryses[2]), fordi de vare kjendte herhjemme, de tilhørte den første Halvdel af det 16de Aarhundrede. Rudolff gaar et Skridt længere. Iblandt Nemheder ved Division nævnes Division med 10, 100 . . ved Afskjæring af de sidste Cifre. Begge disse findes i Claus Lauritsen Skavbos Regnebog[3]) fra 1552, og efter ham have de senere danske Regnebogsforfattere det samme. Endnu var man ikke naaet til Opstillingen af Decimalbrøkerne, dette Skridt foretager først Simon Stevin, der tillige lærer at regne med dem. Han udgav herom et lille Skrift »La Disme«

---

1) Künstliche rechnung mit der ziffer. Nürnberg 1540. 8vo. (Findes paa det st. kgl. Bibl.).

2) Rechnung auf der Linien und Federn. 1550. 8vo. (En senere Udgave 1556 findes paa det st. kgl. Bibl.).

3) Arithmetica Regnekunst, Bode med Cyphret oc regnepenningh. Paris 1552. Forfatteren var senere Professor ved Universitetet fra 1555—1590, først i Mathematik til 1564, senere i Fysik.

1585, hvori denne ny Lære for første Gang fremstilledes. Hans Betegnelsesmaade er noget vidtløftig og ubekvem, men stammer vist fra Sexagesimalbrøkerne, hvormed Astronomerne regnede, og hvis Theori var fuldt udviklet, saaledes at den kunde danne et Forbillede for denne ny Regning. Han sætter nemlig efter Enerne paa Potensexponentens Plads et 0 omsluttet af en Kreds, og for hver Decimal betegner han dens Plads med Pladsens Nummer i en lignende Kreds, saaledes skriver han ikke 3,793 men $3^{(0)}7^{(1)}9^{(2)}3^{(3)}$

Indførelsen i Danmark sker temmelig hurtig, nemlig ved Christoffer Dybvads Regnebog, paa Dansk udkommen i Leyden 1602, hvor Forfatteren studerede og nød stor Anseelse. Hvad vi have af ham, en enkelt mathematisk Afhandling og en Udgave af Euklids første 10 Bøger med Kommentar, vidner om stor Dygtighed. Han var en Søn af den bekjendte Jørgen Christoffersen Dybvad og fik en lignende Skjæbne som Faderen for sine Angreb paa Regjeringen. Han døde i Fængsel 1621. Bogen udkom med Titlen »Decarithmia, ded er Thinde-Regnskab« 8vo, og er mærkelig foruden paa Grund af Indholdet ved Sproget.

Han sætter sig nemlig det Maal at fjerne de latinske Benævnelser, som jo paa den Tid vare uundgaaelige, da Bøgerne skreves paa Latin, og da Faget endnu var saa nyt i Danmark. Hans Benævnelser ere just ikke altid heldige, men en Del have dog vundet Indpas. Vi skulle her nævne nogle enkelte, han bruger saaledes for Triangel Trehjørn, for Rektangel Rethjørn, for Kvadrat Firkant, for Basis Grundlinie og for Kvadratrod Firhjørnet-rod. Hvad Indholdet angaar, holder han sig til Stevin, han benytter hans Betegnelse. Skjønt han kjender Kommaets Anvendelse, saa foretrækker han dog til længere Regninger den ældre Betegnelse, da den sikrere angiver Cifrenes Værdi.

Han leverer Regler for Addition, Subtraktion, Multiplikation og Division, med Beviser, som føres ved Opløsning i dekadiske Addender, og dertil er jo den gamle Betegnelse særlig heldig. Divisionen betragtes saa som det omvendte af Multiplikationen, saa han intet særlig Bevis behøver at angive. Han udfører Multiplikationen 0,032 . 2,6 saaledes

$$\begin{array}{r} 3^{(2)}2^{(3)} \\ 2^{(0)}6^{(1)} \\ \hline 1\ 9\ 2 \\ 6\ 4\ 0\ \ \\ \hline 8^{(2)}3^{(3)}2^{(4)} \end{array}$$

og altsaa $0^{(0)}0^{(1)}3^{(2)}2^{(3)} \times 2^{(0)}6^{(1)} = 0^{(0)}0^{(1)}8^{(2)}3^{(3)}2^{(4)}$.

Ved Anvendelse paa Roduddragning af Decimalbrøker leverer han intet Bevis for, at hver to Decimaler give et Ciffer i Facit.

Som Tillæg findes en praktisk Regnebog med en Mængde Exempler, en Del af geometrisk Indhold; det er fra disse de ovennævnte Betegnelser stamme.

Der hengik dog endnu længere Tid, inden Decimalbrøker bleve almindelige, saaledes udkom 1611 i Wittenberg Resens[1]) »Scholia succinta et facilia in Arithmeticam Gemmae Frisii«, udgivet af en af hans Elever Peter Nicolai Gelstrup[2]). Bogen er skreven under et Ophold i Rostock 1593—94, men har ikke meget at gjøre med Fris's »Arithmetica«[3]), der var den første Lærebog ved Universitetet her; det er nærmest en Regnebog, medens Resens er en virkelig, god Arithmetik. Bogen udkom saa mange Aar efter Dybvads', at man skulde vente, at om ikke Resen selv, saa dog Udgiveren skulde have føjet noget til om Decimalbrøk, hvortil han havde god Anledning ved Afsnittet om Kvadratrodsuddragning. Han benytter der den forældede Maade at uddrage Rødder med en Tilnærmelse uden Opstilling som Decimalbrøker. For øvrigt findes hos ham ogsaa, for første Gang hos en Dansk, anvendt Tilnærmelsesværdierne $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}$ og $a + \frac{r}{2a}$, denne sidste dog kun et Sted i Forbindelse med Decimalbrøk. Han skal bestemme $\sqrt{3}$, saa siger han, at han foretrækker at bebestemme det hundrede Gange større $\sqrt{30000}$, som bliver $173\frac{7}{346}$. Ogsaa i andre Exempler ere de to Tilnærmelsesmethoder sammenblandede.

---

1) Senere Sjællands Biskop.

2) Senere Professor i Fysik ved Kbhvns. Universitet.

3) En Udgave af denne, som udkom første Gang 1540, fra 1551 findes paa det st. kgl. Bibliothek.

Det varede ogsaa nogen Tid, inden man ændrede de trigonometriske Tavler til Decimaltavler, man bibeholdt til henimod Midten af det syttende Aarhundrede Tavlerne med Diametren lig 10^7.

EN MODBEMÆRKNING.

(AF JULIUS PETERSEN).

I det sidste Hefte af dette Tidsskrift har Dr. Gram gjort Indvendinger imod Tilstedeligheden af den ved den sidst afholdte Adgangsexamen ved Polyteknisk Læreanstalt givne tredje Opgave som Beregningsopgave. Da jeg ikke er enig med Dr. Gram i denne Opfattelse, skal jeg tillade mig et Par Modbemærkninger.

Beregningsopgaven skal udelukkende give Lejlighed til at vise Færdighed i praktiske Beregninger. Ubestemtheden af de her brugte Udtryk maa naturligvis altid overlade Noget til det personlige Skøn. Jeg opfatter Fordringen saaledes, at Opgaven kun maa fordre Anvendelse af saadanne Sætninger og Methoder, som den vel forberedte Elev maa antages at have set anvendte og selv at have anvendt mange Gange paa lignende Opgaver, saa at det, han selv skal »finde paa« reduceres til et Minimum.

Dr. Gram har til Opgavens Løsning benyttet en af de sfæriske Grundformler; at forudsætte disse Formler bekjendte er naturligvis utilstedeligt, da sfærisk Trigonometri ikke fordres til Adgangsexamen. Formlen maa imidlertid, direkte eller indirekte, benyttes, og Spørgsmaalet bliver derfor, om Beregningen af Toplansvinklen kræver Opfindsomhed eller ej. Dr. Gram mener jo, jeg mener nej.

Grunden til denne Uoverensstemmelse ligger sikkert i, at Dr. Gram tænker paa de forskjellige Udledelsesmaader, som findes i Lærebøgerne i sfærisk Trigonometri. At der kræves Opfindsomhed til at finde en af disse Maader, blive vi let enige om; jeg derimod har tænkt mig en anden Fremgangsmaade, som vel giver en lidt længere og mindre elegant Udledelse, men som paa den anden Side fører ad velbekjendte Veje. Fra Beregningen af Toplansvinklerne i Tetraeder, Oktaeder og Ikosaeder er Eleven vant

til at skaffe sig en Trekant, der indeholder Vinklen og har tre bekjendte Sider, ved at lægge et Snit vinkelret paa Kanten, og det samme maa han antages at have gjort i ikke faa Opgaver. Naar han gjør det her og for Resten kan løse en retvinklet Trekant, stilles der ikke flere Fordringer til hans Opfindsomhed.

Jeg kan give Dr. Gram Ret i, at Opgaven er temmelig vidtløftig; man maa imidlertid lægge Mærke til, at dette ikke har den Betydning ved Adgangsexamen som ved en anden Examen, hvor der gives Karakterer; ved en saadan kan det have stor Betydning, om Kandidaten faar ug eller mg; ved Adgangsexamen kommer det derimod blot an paa, at man af Besvarelserne kan bedømme Vedkommendes Modenhed; det kommer her mere an paa, hvad der er gjort, end paa, hvad der mangler; om f. Ex. i det foreliggende Tilfælde en Besvarelse var fuldstændig eller kun var naaet til Bestemmelsen af en af Siderne i Grundfladen, vilde ikke have bevirket nogen mærkelig Forskjel i min Bedømmelse.

Skjønt jeg kunde have adskilligt at indvende mod Dr. Petersens Opfattelse, og de af ham anførte Modbemærkninger ingenlunde synes mig at afkræfte mine Anker mod den nævnte Opgave som Beregningsopgave, skal jeg dog ikke fortsætte Diskussionen videre men gjerne overlade Læserne at dømme os imellem. Kun til det i Slutningen anførte skal jeg tillade mig at knytte en almindelig Bemærkning. At give en Opgave, som ikke forlanges løst fuldstændig, men hvor Hensigten altsaa, som ved den ovenomtalte, nærmest er at se, hvor vidt Eleven kan naa, kan vel være et interessant Experiment, men synes mig ikke ganske billigt overfor Examinanden, som ikke ved, hvad Meningen er, og derfor lettelig forvirres og saaledes præsterer noget mindre godt, end han ellers var i Stand til. Mig forekommer det utvivlsomt, at en Examensopgave, ogsaa ved polyteknisk Adgangsexamen, bør stilles saaledes, at en flink Examinand kan opnaa den Tilfredsstillelse at kunne præstere en fuldstændig Løsning i den givne Tid.

J. P. Gram.

LØSNING AF OPGAVERNE 399, 458, 490, 512, 514, 515 OG 511.

399. Kan man i Almindelighed konstruere en Trekant af a, b og $B - C$ ved Passer og Lineal? Specielt antages den givne Vinkel at være ret.

(Julius Petersen).

Forlænges CB til C_1, saa at $AC = AC_1$, er $\angle C_1AB$ bekjendt $= B - C$. Afsættes denne, og derefter Punktet C_1, samt tegnes en Cirkel med Centrum A og Radius b, bliver Opgaven:

Gjennem et Punkt C_1 af en Cirkel at trække en Linie, som skjærer Cirklen anden Gang i C og en fast Diameter i B, saaledes at BC har en given Længde.

Vælges AC_1 til Abscisseaxe med Begyndelsespunkt i A, faar man til Bestemmelse af Punktet B (x, y)

$$(x^2 + y^2)^2 - (2b^2 - a^2)(x^2 + y^2) + 2a^2bx - a^2b^2 + b^4 = 0$$

$$\text{og } y = \alpha x, \text{ idet } \alpha = tg\,(B - C),$$

da Ligningen er af fjerde Grad og i Almindelighed ikke løselig ved Kvadratrod, kan Opgaven i Almindelighed ikke løses ved Passer og Lineal. Er $B - C = 90^0$, skal man have $x = 0$ i Stedet for $y = \alpha x$, hvoraf

$$y^4 - (2b^2 - a^2)y^2 - a^2b^2 + b^4 = 0,$$

y kan da bestemmes ved Passer og Lineal. For i det specielle Tilfælde at løse Opgaven ved Konstruktion, har man, idet Diameteren C_1A's andet Endepunkt er D, at $C_1B \,.\, C_1C = C_1A \,.\, C_1D$, tegner man derfor gjennem A og D en vilkaarlig Cirkel, og trækker en Linie gjennem C_1, hvoraf Cirklen afskjærer en Korde lig a, vil det udenfor Cirklen liggende Stykke være C_1B.

(A. S. Bang).

458. I en Cirkel skal indskrives en Firkant med tre givne Diagonaler i den fuldstændige firsidede Figur.

Firkanten er $ABCD$; betegnes Skjæringspunktet for AB og CD ved E, for AD og BC ved F, ere Diagonalerne AC, BD

og EF. Da foruden disse den omskrevne Cirkels Radius er givet, ere Firkantens Vinkler bekjendte, altsaa ogsaa Formen af Trekanterne CDF og ADE. Afsættes $DC = DC_1$ ud ad DF og $DA = DA_1$ ud ad DE, og skjærer en Parallel med A_1C_1 gjennem F DE i Punktet G, er $FG = AC \cdot \frac{FD}{DC}$ og $\frac{DE}{DG} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DC}{DF}$. Da man altsaa kjender FG, EF og $\frac{DE}{DG}$, kan man ved Ligedannethedsmethoden paa $\angle D$ lægge Trekanten EFG. Ved Linierne EA og FC, der gaa i bekjendte Retninger, bestemmes derpaa de 3 andre Vinkelspidser A, B og C. (A. S. Bang).

490. En Firkant med givne Sider er omskrivelig om en Cirkel. Naar den ene Side lægges fast, hvilket er da det geometriske Sted for den indskrevne Cirkels Centrum.

Lad en af Firkantens Stillinger være $ABCD$, idet BC ligger fast, og den indskrevne Cirkels Centrum O. AD drejes om O til den falder henad BC, hvorved A kommer i A_1, D i D_1; da er $\angle A_1OD_1 + \angle COB = 2R$. Halveres $\angle A_1OC$ ved OP og $\angle BOD_1$ ved OQ er $\angle POQ = R$, hvoraf følger, at PQ deler saavel A_1C som BD_1 harmonisk. P og Q kunne da bestemmes som Brændpunkter i en Involution, bestemt ved Punktparrene A_1, C og B, D_1, og det geometriske Sted for O bliver en Cirkel med Centrum i den faste Linie (over PQ som Diameter).

(A. S. Bang).

512. I en fuldstændig Firkant indskreven i en Cirkel ligge Midtpunkterne af de 6 Sider, de tre Skjæringspunkter mellem de modstaaende Sider og Cirklens Centrum paa en ligesidet Hyperbel.

(H. G. Zeuthen).

Lad $ABCD$ være de fire Vinkelspidser i Firkanten, $A_1B_1C_1D_1M_1N_1$ Midtpunkterne af henholdsvis AB, BC, CD, DA, AC og BD. $A_1B_1C_1D_1$, $A_1M_1C_1N_1$ og $D_1M_1B_1N_1$ danne da tre koncentriske Parallelogrammer indskrevne i den i Opgaven nævnte Hyperbel, i hvilken altsaa — Sætningens Rigtighed forudsat — A_1C_1, B_1D_1 og M_1N_1 blive diametralt modstaaende Punkter.

For at bevise, at Kurven virkelig er en ligesidet Hyperbel, kan man simpelt benytte følgende Hjælpesætning: en vilkaarlig Korde i en ligesidet Hyperbel ses fra to diametralt modstaaende Kurvepunkter under Vinkler, der ere lige store med modsat Fortegn.

Ifølge denne ligge f. Ex. $A_1B_1C_1N_1$ paa én ligesidet Hyperbel, fordi

$$\angle B_1A_1N_1 = CAD = CBD = N_1C_1B_1,$$

og ligesaa $A_1B_1C_1$ og E, hvor E er Skjæringspunktet mellem AB og CD, fordi

$$\angle EA_1B_1 = BAC = BDC = B_1C_1E.$$

Centret O for den omskrevne Cirkel ligger ogsaa paa samme Hyperbel, fordi

$$\angle EA_1O = OC_1E = 90^0.$$

Til et fuldstændigt Bevis kræves naturligvis Godtgjørelse af, at ogsaa den omvendte Sætning til den benyttede Hjælpesætning er rigtig; dette er imidlertid umiddelbart indlysende, saafremt en ligesidet Hyperbel blot er entydig bestemt ved et Par diametralt modstaaende Punkter og endnu et Punkt. Tænker man sig Hjælpesætningen bevist ved Benyttelse af, at Supplementkorder ere parallele med Par af konjugerede Diametre, og at Asymptoterne i en ligesidet Hyperbel halvere Vinklerne mellem et Par konjugerede Diametre, bevises dette tilmed samtidig med Sætningen selv.[1])

(C. Juel).

514. Vis at Udtrykket

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$$

altid vil være en Sum af 2 Kvadrattal, naar n er et helt Tal. (Mathesis T. IV.).

Da man har

$$\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}\right]^2+\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2\sqrt{2}}\right]^2=$$

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n-2}+(\sqrt{2}-1)^{4n-2}+(\sqrt{2}+1)^{4n}+(\sqrt{2}-1)^{4n}}{8}=$$

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n-1}+(\sqrt{2}-1)^{4n-1}}{2\sqrt{2}}$$

[1]) En analytisk Løsning er meddelt af Hr. Lærer N. Lund i Slagelse.

og

$$\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n+1}+(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2\sqrt{2}}\right]^2+\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2\sqrt{2}}\right]^2=\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+1}+(\sqrt{2}-1)^{4n+1}}{2\sqrt{2}}$$

vil Sætningen være bevist, saafremt

$$(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1} \text{ og } (\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}$$

ere delelige med $2\sqrt{2}$, hvilket er Tilfældet, da

$$(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1) \text{ og } (\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2$$

gaa op henholdsvis i det første og andet af Tallene.

(A. S. Bang).

515. Hvorledes indses det, at Funktionen

$$\frac{(x+y+z-1)(x+y+z-2)(x+y+z-3)}{1.2.3}+\frac{(y+z-1)(y+z-2)}{1.2}+z$$

gjennemløber alle positive hele Tal, hvert af dem kun en Gang, naar x, y og z uafhængig af hverandre antage Værdierne af alle positive hele Tal?

Man beviser først, at $\frac{(y+z-1)(y+z-2)}{1.2}+z$ gjennemløber alle positive hele Tal, naar y og z ere hele Tal.

Udtrykket har Formen $\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}+b$, hvor $a>b$. Man kan bestemme a og b saaledes, at Udtrykket faar Værdien T, hvor T er et vilkaarligt opgivet helt Tal; a bestemmes af

$$\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}<T\leqq\frac{a(a-1)}{1.2}.$$

Nu faar b Værdien

$$T-\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}\leqq\frac{a(a-1)-(a-1)(a-2)}{1.2},$$

altsaa $b\leqq a-1$; Betingelsen $a>b$ er da opfyldt.

At man kun en Gang kan faa Værdien T paa denne Maade, indses ved, at Antagelsen

$$\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}+b=\frac{(a_1-1)(a_1-2)}{1.2}+b_1,$$

hvor $a_1 > a$, fører til

$$\frac{(a_1-1)(a_1-2)}{1.2}-\frac{(a-1)(a-2)}{1.2} \geqq \frac{a(a-1)-(a-1)(a-2)}{1.2},$$

hvoraf $b - b_1 \geqq a - 1$, hvilket er umuligt, da $a > b$ og $b_1 \geqq 1$.

Det opgivne Udtryk har Formen

$$\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{1.2.3}+\frac{(b-1)(b-2)}{1.2}+c, \text{ hvor } a > b > c.$$

Man kan bestemme a, b og c saaledes, at det faar Værdien T, idet a bestemmes af

$$\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{1.2.3} < T \leqq \frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3};$$

man faar nu

$$T-\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{1.2.3}=p \leqq \frac{(a-1)(a-2)}{1.2},$$

som viser, at, naar b og c bestemmes saaledes, at

$$\frac{(b-1)(b-2)}{1.2}+c=p, \text{ bliver } a > b > c.$$

Antages det, at man kan faa Værdien T 2 Gange, altsaa at

$$\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{1.2.3}+\frac{(b-1)(b-2)}{1.2}+c=$$
$$\frac{(a_1-1)(a_1-2)(a_1-3)}{1.2.3}+\frac{(b_1-1)(b_1-2)}{1.2}+c_1,$$

hvor $a_1 > a$ (var nemlig $a_1 = a$, kommer man i Følge det foregaaende til $b = b_1$, $c = c_1$), faar man

$$\frac{(b-1)(b-2)}{1.2}+c > \frac{(a-1)(a-2)}{1.2},$$

og, da $a > b$, følger heraf $c > b - 1$, hvilket er umuligt, da $b > c$.

Sætningen kan udvides til at gjælde om Udtrykket

$$a_1+\frac{(a_1+a_2-1)(a_1+a_2-2)}{1.2}+\ldots$$
$$\frac{(a_1+a_2+\ldots a_n-1)(a_1+\ldots a_n-2)\ldots(a_1+\ldots a_n-n)}{1.2\ldots n}.$$

(A. S. Bang).

511. Naar vil Ligningen $x^5+ax^3+b=0$ (1) have lige Rødder, og i hvilke reelle Faktorer kan dens venstre Side da opløses? Ex. $b = 162$. (A. Steen).

För att eqv. (1) skall hafva lika rötter fördras, att dess venstra ledd och första derivatan deraf hafva gemensam divisor. Sök för den skull största gemensamma divisorn till $x^5 + ax^3 + b$
och dess derivata $5x^4 + 3ax^2$.
Den är $625bx + 90a^3$,
då ant. $5^5 . 6^2 + 3^3 . 2^2 . a^5 = 0 \therefore a < 0$, eller $b = 0$.

I förra fallet är $625bx + 90a^3 = \lambda . \left(x - \sqrt{-\frac{3a}{5}}\right)$,

då λ betecknar en viss konstant.

Eqv. (1) kan derför skrifvas sålunda

$$\left(x - \sqrt{-\frac{3a}{5}}\right)^2 . \left(x^3 + 2\sqrt{-\frac{3a}{5}}x^2 - \frac{4a}{5}x - \frac{2a}{5}\sqrt{-\frac{3a}{5}}\right) = 0.$$

Högra faktorn i venstra ledet kan ytterligare uppdelas i två reela faktorer, af hvilka den ena är af 1sta graden och den 2dra af 2dra graden. Dock kan ej denna senare andra faktor uppdelas i två reela faktorer emedan, såsom man lätt finner medelst användning af Sturms teorem, eqv.

$$x^3 + 2\sqrt{-\frac{3a}{5}}x^2 - \frac{4a}{5}x - \frac{2a}{5}\sqrt{-\frac{3a}{5}} = 0$$

endast har en enda reel rot.

I det senare fallet, då $b = 0$,
blir eqv. (1) $x^5 + ax^3 = 0$.
Dess venstra membrum kan då uppdelas i faktorerna

$$x^3 \text{ och } x^2 + a,$$

hvilken senare faktor kan ytterligare uppdelas i 2 andra reela faktorer, om $a < 0$.

Ex.: För $b = 162 = 2 . 3^4$ blir eqv. (1)

$$x^5 - 15x^3 + 162 = 0$$

som också kan skrifvas

$$(x - 3)^2 . (x^3 + 2x^2 + 12x + 6) = 0.$$

(Frans.)

---

[1]) En anden Løsning af denne Opgave er meddelt i forrige Aargang S. 187.

OPGAVER TIL LØSNING.

522. Træk en ret Linie, som skjærer to givne Cirkler saaledes, at de tre mellem Skjæringspunkterne beliggende Liniestykker blive lige store.

523. Hvad er det geometriske Sted for den fjerde Vinkelspids af et Parallelogram, hvis ene Vinkelspids ligger fast og de to andre bevæge sig paa en Kurve og dens Evolvente? Specielt antages det faste Punkt i en Cirkels Centrum og Cirklen og dens Evolvente at være de givne Kurver.

(S. A. Christensen).

524. Man skal bestemme Værdien af den uendelige Kjædebrøk

$$\frac{1}{a} + \frac{a^2}{1+}\,\frac{(a+1)^2}{1+}\,\frac{(a+2)^2}{1+}\cdots$$

naar a er et vilkaarligt rationalt Tal.

(J. L. W. V. Jensen).

OPGAVER TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN.

(47 AF E. BUCHWALD).

47. To Mænd eje hver sin rektangulære Mark med bekjendte Sider. De skulle til at aflede Vandet fra deres Marker, grave hver sit Stykke af en Kanal, og Stykkernes Størrelse skulle forholde sig som de to Markers Arealer.

1) Hvis hele Kanalens Længde er bekjendt, hvorledes konstrueres da de Stykker, hver af de to Ejere skulle grave?

2) Hvis det Stykke, den ene Ejer skal grave, er bekjendt, hvorledes konstrueres da det Stykke, den anden skal grave?

48. Hvormange Tal findes der op til 10^n, som hverken ere delelige med 3 eller, skrevne i 10-Talsystemet, indeholde noge Ciffer 3?

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund, Lund.

A. Th. Daug, Upsala.

H. Gyldén, Stockholm.

Sophie Kowalevski, Stockholm.

C. J. Malmsten, Upsala.

G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes, Christiania.

O. J. Broch, Christiania.

S. Lie, Christiania.

L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz, Kjøbenhavn.

J. Petersen, Kjøbenhavn.

H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Side

Om en Dualisme i den absolute Geometri. Af *Axel Thue* 129
En Udledelse af Duhamel's Konvergensbetingelse. Af *H. G. Zeuthen* 147
Indførelsen af Regning med Decimalbrøker i Danmark. Af *S. A. Christensen* 149
En Modbemærkning. Af *Julius Petersen* 152
Løsning af Opgaverne 399, 458, 490, 512, 514, 515 og 511 154
Opgaver til Løsning 160
Opgaver til Brug ved Undervisningen 160

TIDSSKRIFT

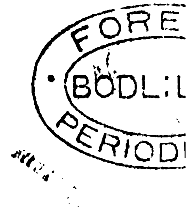
FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.



FEMTE RÆKKE.

Tredje Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1885.

SJETTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

FRÅN FYSISK-MATEMATISKA FÖRENINGEN I UPSALA.
III.

(MEDDELADT AF O. OLSSON).

1. Wid föreningens sammankomst d. 8. Oktober d. å. behandlades följande af Kand. O. Olsson uppstälda sats:

Bevisa, att

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^n \psi \, d\psi}{\left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}\right)^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{k_1^{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \text{ der } k^2 + k_1^2 = 1.$$

Föreningens Sekreterare (O. Olsson) visade, hurusom denna likhet blott vore en specialisation af ett vida allmännare fall, nämligen

$$\int_0^{\pi} \frac{f\left(\frac{k_1 \sin \psi}{\Delta^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right)}{\Delta^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} d\psi = \frac{1}{k_1} \int_0^{\pi} f(\sin \psi) \, d\psi,$$

$$\text{der } \Delta\left(\frac{\psi}{2}\right) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}.$$

Beviset härför grundade han på några egenskaper hos ellipsen. Om man nämligen hänför en punkt $P[(r, \theta); (x, y)]$ på ellipsen till hans medelpunkt och hufvudaxlar ($2a$, $2b$), är

$$r^2 \, d\theta = x \, dy - y \, dx$$

eller, emedan $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$,

(φ betecknar den mot punkten P svarande excentriska vinkeln)

$$r^2 \, d\theta = ab \, d\varphi.$$

Men $$r^2 = \frac{b^2}{1 - k^2 \cos^2 \theta} \quad (k = \text{excentriciteten})$$

eller $$r^2 = \frac{b^2}{\Delta^2(\theta)},$$

hvadan $$\frac{k_1}{\Delta^2(\theta)} d\theta = d\varphi. \qquad (1)$$

Dessutom har man likheterna

$$r^2 \sin\theta \cos\theta = xy = ab \sin\varphi \cos\varphi$$

eller
$$\frac{k_1 \sin 2\theta}{\Delta^2(\theta)} = \sin 2\varphi,$$

hvaraf
$$f\left(\frac{k_1 \sin 2\theta}{\Delta^2(\theta)}\right) = f(\sin 2\varphi),$$

och med stöd af (1):

$$\int_0^{\pi} \frac{f\left(\frac{k_1 \sin 2\theta}{\Delta^2(\theta)}\right)}{\Delta^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{k_1}\int_0^{\pi} f(\sin 2\varphi)\, d\varphi,$$

samt slutligen, efter några enkla transformationer,

$$\int_0^{\pi} \frac{f\left(\frac{k_1 \sin\psi}{\Delta^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right)}{\Delta^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} d\psi = \frac{1}{k_1}\int_0^{\pi} f(\sin\psi)\, d\psi.$$

Derefter visade han, hurusom man med tillhjelp af relationen (1) äfven kunde härleda den under föregående termin af Hr C. B. S. Cavallin lemnade generalisationen af Kand. H. Petrinis sats:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta^n(\psi)\, d\psi = k_1^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta^{n+2}(\psi)}.$$

Hr. Cavallins generalisation hade utseendet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{k_1^2}{\Delta^2(\psi)}\right)}{\Delta^2(\psi)} d\psi = \frac{1}{k_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\Delta^2(\psi))\, d\psi.$$

Med användning af likheten (1) kan härledningen verkställas på följande sätt.

Emedan

$$\frac{b^2}{\Delta^2(\theta)} = r^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi = a^2 \Delta^2(\varphi)$$

eller
$$\frac{k_1^2}{\Delta^2(\theta)} = \Delta^2(\varphi),$$

och altså
$$f\left(\frac{k_1^2}{\Delta^2(\theta)}\right) = f(\Delta^2(\varphi)),$$

följer på grund af (1):

$$\frac{k_1 f\left(\frac{k_1^2}{\Delta^2(\theta)}\right)}{\Delta^2(\theta)}\, d\theta = f(\Delta^2(\varphi))\, d\varphi$$

hvaraf $$\int_0^{\pi} \frac{f\left(\frac{k_1^2}{\Delta^2(\theta)}\right)}{\Delta^2(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{k_1}\int_0^{\pi} f(\Delta^2(\varphi))\, d\varphi$$

och slutligen $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{k_1^2}{\Delta^2(\psi)}\right)}{\Delta^2(\psi)}\, d\psi = \frac{1}{k_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\Delta^2(\psi))\, d\psi.$$

---

2. Till sammankomsten d. 22 Oktober hade Hrr Olsson och Pettersson framstält till behandling följande sats:

Till en gifven kroklinie bildas fotpunktskurvan; till denna fotpunktskurva, dess fotpunkts-kurva o. s. v. Wisa att, om man så fortsätter i oändlighet, den slutliga gränskurvan, generelt taget, kommer att reduceras till ett ändligt antal diskreta punkter.

Kand. S. Pettersson lemnade ett bevis härför, dervid stödjande sig på följande hjelpsats:

Tangenterna i motsvarande punkter på en kurva och dess fotpunktskurva bilda lika stora vinklar med de resp. radii vectores.

Ty om man från de konsekutiva punkterna P och P' på den ursprungliga kurvan drager tangenterna PQ och $P'Q'$, och från ett origo O nedfäller mot dessa perpendiklarne OQ och OQ' samt betecknar skärningspunkten mellan PQ och $P'Q'$ med P'', så kan genom punkterna O, Q', Q, P'' en cirkel-linie läggas. Häraf följer, att $\angle\, OP''Q' = \angle\, OQQ'$; men i limes, d. v. s. då punkterna P och P' sammanflyta, är $\angle\, OP''Q' =$ vinkeln mellan radius vector OP och tangenten i P, samt $\angle\, OQQ' =$ vinkeln mellan radius vector OQ och tangenten i Q.

Med tillhjelp häraf gaf han ett mycket enkelt bevis för satsen. Betecknar man nämligen radien OP med r och radii vectores i

motsvarande punkter på 1sta, 2dra . . . ., n'te fotpunktskurvan med resp. $r_1, r_2, \ldots, r_n$, samt vinkeln OPQ med ψ blir

$$r_1 = r \sin \psi$$
$$r_2 = r_1 \sin \psi = r \sin^2 \psi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n = r_{n-1} \sin \psi = r \sin^n \psi.$$

För alla punkter på den gifna kurvan, der $\psi \lessgtr \frac{\pi}{2}$ blir altså, såvida r är ändlig, $\lim_{(n=\infty)} r_n = 0$, och för punkter, der $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{(n=\infty)} r_n = r$.

Den slutliga gränskurvan kommer sålunda, i allmänhet taget, att reduceras till origo och till de punkter på den ursprungliga kroklinien, der radius vector är vinkelrät mot kurvan.

Blott i det fall, att den gifna kurvan är en cirkel, hvars medelpunkt ligger i origo, utgöres gränspedalen af ett oändligt antal punkter; dessa sammanfalla med cirkelns periferi. Detta är också det enda fall, då origo icke tillhör gränskurvan.

---

3. Vid sammankomsten d. 5. November behandlades följande af Kand. A. Meyer uppstälda sats:

Om tvänne potensserier $P(x|a)$ och $P_1(x|a)$ adderas term för term, så kan den så uppkommande potensserien icke hafva annat konvergensområde än de båda föregåendes gemensamma, såvida icke P och P_1 hafva identiskt samma konvergensområde. Huru ställer sig satsen för potensserier af flere variabler än en?

Kand. Meyer framlade följande lösning af satsen:

A. Potensserier af en variabel.

Om serierna ej hafva identiskt samma konvergensområde, så måste den enas (t. ex. P_1's) helt och hållet omsluta den andras, emedan de båda områdena äro cirklar med samma medelpunkt. Tag då en punkt y mellan de båda cirklarne. Om då y låge inom den nya potensseriens (P_2) konvergensområde, så är således

$P_2(y\,|\,a)$ absolut och likformigt konvergent, likasom äfvan $P(y\,|\,a)$ i närheten af y. Då måste så äfven vara fallet med $P_1(y\,|\,a)$, som är skilnaden mellan de båda andra, hvilket strider mot antagandet, ty en potensserie kan ej vara konvergent i någon punkt utom sitt konvergensområde.

Att deremot satsen ej gäller, om de hafva identiskt samma konvergensområde, kan ses t. ex. af serierna

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{och} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x^n,$$

hvilka båda hafva konvergensradien 1, under det att den serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

som uppkommer genom deras addition, konvergerar i hela planet.

B. Potensserier af flere variabler.

1. Förberedande satser angående dylika potensserier.

Konvergensområdet för en potensserie af n variabler är tydligen utsträckt i en rymd af $2n$ dimensioner, enär jag måste använda en särskild dimension för hvarje variabels reela och imaginära del. Om vi emellertid sätta $x_\nu = p_\nu + q_\nu\, i$, så veta vi, att begränsningen till konvergensområdet för serien

$$P(x_1, \ldots\ldots x_n)$$

i denna $2n$-dimensionabla rymd har formen

$$F(p_1^2 + q_1^2,\ p_2^2 + q_2^2,\ \ldots\ldots,\ p_n^2 + q_n^2),$$

hvadan vi kunna inskränka dimensionernas antal till n, och dock få ett fullständigt uttryck för konvergensområdet, om vi på axlarne afsätta kvantiteterna

$$\sqrt{p_1^2 + q_1^2},\ \sqrt{p_2^2 + q_2^2},\ \ldots\ldots\ldots,\ \sqrt{p_n^2 + q_n^2},$$

eller variablernas absoluta belopp. På detta sätt blir begränsningen till konvergensområdena för serier af resp. 1, 2, 3, ..., n variabler, rymder af resp. 0, 1, 2, ..., $n - 1$ dimensioner, och konvergensområdena sjelfva reducerade till resp. 1, 2, 3, ... n dimensioner. Detta vilja vi benämna konvergensområdenas reducerade form. I den reducerade formen är således konvergens-

området för en potensserie af en variabel blott en rät linie, begränsad af en punkt (samt origo), för en potensserie af två variabler ett stycke af planet, begränsadt af en kurva (samt axlarne), för tre variabler ett stycke af den tredimensionabla rymden, begränsadt af en yta (samt koordinatplanen), o. s. v.

En punkt $a_1 \ldots, a_n$ i en sådan n-dimensionabel rymd tillhörande konvergensområdets reducerade form föreställer således i det verkliga $2n$-dimensionabla konvergensområdet en n-dimensionabel rymd uttryckt genom de n ekvationerna

$$\begin{cases} p_1^2 + q_1^2 = a_1^2 \\ p_2^2 + q_2^2 = a_2^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_n^2 + q_n^2 = a_n^2. \end{cases}$$

Vi vilja benämna denna rymd en »n-dimensionabel cylindersfer« i den $2n$-dimensionabla rymden. En cylindersfer i det tvådimensionabla plana rummet blir således en cirkellinie o. s. v.

2. Diskussion af Satsen.

Att den potensserie $P_2(x_1 \ldots\ldots x_n)$, som uppkommer genom att term för term summera tvänne andra potensserier

$$P(x_1, \ldots x_n) \text{ och } P_1(x_1, \ldots x_n)$$

måste hafva minst samma konvergensområde som de båda senares gemensamma, är kändt genom en sats af Weierstrass, och genom ett bevis alldeles analogt med det i afdelning A förda inses äfven på grund häraf, att inom P_2's konvergensområde ej kan ligga någon punkt, som ligger inom konvergensområdet för den ena, men utom eller på gränsen till den andras. Frågan är således blott, när det är möjligt, att inom P_2's konvergensområde kan ligga punkter, som hvarken tillhöra P's eller P_1's.

Men vi veta, att, om inom en potensseries konvergensområde ligger ett visst ställe

$$x_1 \ldots\ldots x_n,$$

så tillhöra äfven alla punkter

$$\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$$

detta konvergensområde, om

$$|\xi_1| \leqq |x_1|, \ldots\ldots, |\xi_n| \leqq |x_n|.$$

Om jag således framställer konvergensområdena i sin reducerade form och från en viss punkt $(|x_1|, \ldots. |x_n|)$ drager räta linier parallela med de n axlarne, så måste, om $(x_1 \ldots, x_n)$ tillhör en viss potensseries konvergensområde, äfven alla punkter i den så uppkommande n-dimensionabla solida vinkeln tillhöra det samma. Om således punkten $(x_1, \ldots x_n)$ tillhör potensserien P_2's konvergensområde, men hvarken P's eller P_1's, så måste alla räta linier, som från $(|x_1|, \ldots. |x_n|)$ dragas till axlarne inom den genom de med dessa parallela linierna begränsade rymden antingen träffa båda konvergensområdenas begränsning samtidigt, eller ej träffa dem alls. Men nödvändiga och tillräckliga vilkoret för möjligheten häraf är uppenbarligen, att konvergensområdena, framstälda i den reducerade formen, hafva gemensamt ett stycke af gränsen, hvilket stycke måste vara utsträckt i lika många dimensioner som gränsen sjelf. Lätt inses då, att detta vilkor äfven bibehålles oförändradt, om man talar om de verkliga konvergensområdena i stället för desamma i reducerad form.

Resultatet af vår undersökning kan således sammanfattas i följande tabell, som visar, att för potensserier af en variabel gäller samma formel som den vi erhålla för flere.

För serier med variabler till antal	hvars konv. omr. eger dimensioner till antal	med gräns af dimensioner till antal	behöfs gemens. dimensioner i reducerad form till antal	som i verkligheten betyda en serie	af cylindersferer i dimensioner till antal	tilsammans dimensioner till antal
1	2	1	0	0-faldig	1	1
2	4	3	1	enkel	2	3
3	6	5	2	dubbel	3	5
4	8	7	3	3-dubbel	4	7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$2n$	$2n-1$	$n-1$	$(n-1)$ dubbel	n	$2n-1$

Man kan då fråga, om det äfven verkligen är möjligt, att tvänne potensserier kunna hafva stycken af sina konvergensom-

rådens gränser — utsträckta i lika många dimensioner som gränserna sjelfva — gemensamma, utan att dessa områden helt och hållet sammanfalla. — Att detta för potensserier af flere, i motsats mot sådana af blott en, verkligen är möjligt, bevisas lättast genom ett exempel:

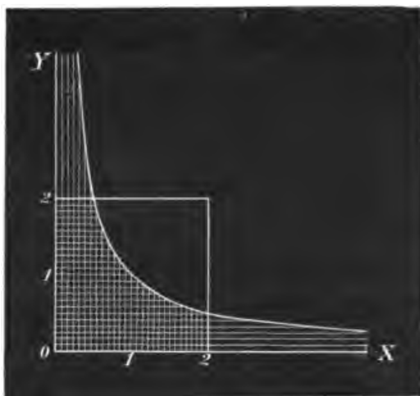
Seriens

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+xy+\frac{x^3}{2^3}+\frac{x^4}{2^4}+x^2y^2+\frac{x^5}{2^5}+\frac{x^6}{2^6}+x^3y^3+\ldots.$$

konvergensområde i reducerad form uttgör det i figuren vertikalt streckade området;

seriens

$$1+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2^2}-xy+\frac{y^3}{2^3}+\frac{y^4}{2^4}-x^2y^2+\frac{y^5}{2^5}+\frac{y^6}{2^6}-x^3y^3+\ldots.$$



konvergensområde är deremot det horizontalt streckade. De hafva således ett stycke af hyperbeln $xy = 1$ till gemensam gräns. Adderas serierna term för term, så fås åter serien:

$$1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\frac{y^3}{2^3}+\ldots.$$

hvars konvergensområde i reducerad form utgöres af hela den kvadrat, hvars ena hörn är origo och sida 2 längdenheter. Huru detta exempel ter sig i fyra dimensioner inses utan svårighet.

INTEGRATION AF EN DIFFERENTIALLIGNING.

(AF A. ARNEBERG).

I »Acta mathematica« 3. 1883 har Hr. Prof. Steen integreret en Klasse lineære Differentialligninger mellem to variable. Fremgangsmaaden er denne. Den forelagte Differentialligning differen-

tieres et vist Antal Gange. Man faar derved en Differentialligning, der ganske vist er af højere Orden end den givne, men som til Gjengjæld har integrabel Form. Af dens Integral faas den forelagte Lignings ved Bortfjernelse af det overflødige Antal Konstanter, der nødvendig komme ind i Regningens Løb.

1. Methoden lader sig anvende paa følgende lineære Differentialligning mellem to variable:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(-1)^r.(n+p)(n+p+1)\ldots.(n+p+r-1)}{[r]}\,. \\ \varphi^{(r)}\,.\,\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}} = \psi(x). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$\varphi(x)$ er en algebraisk rational hel Funktion af x af højst n'te Grad, medens $\psi(x)$ er en vilkaarlig Funktion af samme variable. Det kan vises, at denne Ligning bringes paa integrabel Form ved et positivt eller negativt Antal Differentiationer. Der er følgende Tilfælde at undersøge,

$$\begin{aligned} p &> -n, \\ &< -n, \\ -p &\geqq -2n, \\ -p &< -2n. \end{aligned}$$

$p > -n$. Differentieres en Gang, vil der fra to paa hinanden følgende Led, der indeholde $\frac{d^{n-s+1}y}{dx^{n-s+1}}$ og $\frac{d^{n-s}y}{dx^{n-s}}$, hvor $s \leqq n$, blandt andet komme følgende,

$$(-1)^{s-1}\frac{(n+p)(n+p+1)\ldots\ldots(n+p+s-2)}{[s-1]}\varphi^{(s)}(x)\,.\,\frac{d^{n-s+1}y}{dx^{n-s+1}} \quad \text{og}$$

$$(-1)^{s}\frac{(n+p)(n+p+1)\ldots\ldots(n+p+s-1)}{[s]}\varphi^{(s)}(x)\,\frac{d^{n-s+1}y}{dx^{n-s+1}}.$$

Sammentrækkes disse til et Led, faar man

$$(-1)^{s}\frac{(n+p-1)(n+p)\ldots\ldots(n+p+s-2)}{[s]}\varphi^{(s)}(x)\,\frac{d^{n-s+1}y}{dx^{n-s+1}}.$$

Alle Led i den nye Differentialligning, der er af $(n+1)$'te Orden, faa Faktoren $(n+p-1)$ som Koefficient, undtagen Leddet med $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$. En Differentiation til indfører Faktoren $(n+p-2)$ o. s. v.

Efter $(n+p)$ paa hinanden følgende Differentiationer bliver Resultatet

$$\varphi(x) \cdot \frac{d^{2n+p}y}{dx^{2n+p}} = \psi^{(n+p)}(x).$$

Deraf kan man finde $\frac{d^{2n+p-1}y}{dx^{2n+p-1}}$, og endelig y ved en $(2n+p-1)$ dobbelt Integration. Af Konstanterne $(2n+p)$ i Antal, maa de overflødige, $(n+p)$ i Antal, fjernes ved at indsætte Integralet i den givne Ligning, og søge Betingelsen for, at den bliver identisk uden Hensyn til x.

a) Er $\psi(x)$ en algebraisk, rational hel Funktion af en Grad, der højst er lig med $(n+p-1)$, saa bliver $\psi^{(n+p)}(x) = 0$, og den forelagte Ligning har da en algebraisk, rational hel Funktion af x som Integral.

b) Det samme gjælder, saafremt $\psi(x) = 0$, eller hvis $\frac{\psi^{(n+p)}(x)}{\varphi(x)}$ giver som Kvotient en algebraisk, rational hel Funktion af x, altsaa $\psi(x)$ selv er algebraisk, rational hel.

Ex. 1.

$$(3+2x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 14(1-x)\frac{dy}{dx} - 56y = 1 - x^3.$$

Her er $n = 2$, $p = 5$, $\psi^{(7)} = 0$, altsaa er

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \ldots + \beta_9 x^8.$$

Indsættes i den givne Ligning, og ordnes efter Potenser af x, faar man ved at sætte Faktoren til hver Potens af x lig med 0 Ligninger til at udtrykke 7 af Konstanterne ved de 2 andre. Disse Ligninger sammen med ovenstaaende Udtryk for y repræsentere Integralet af den givne Ligning.

$$-p \begin{cases} < -n \\ > -2n. \end{cases}$$

(1) kan da let ændres til

$$\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{r=1}^{r=p-n} \frac{(p-n)(p-n-1)\ldots(p-n-r+1)}{[r]}\varphi^{(r)}(x) \cdot \frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}} = \psi(x).$$

Ligningen indeholder nemlig ikke Led, for hvilke $r > (p - n)$. Anvender man symbolsk Skrivemaade, ændres ovenstaaende Ligning til

$$\left(\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}} + \varphi(x)\right)^{(p-n)} = \psi(x),$$

hvoraf man atter faar

$$\varphi(x) \cdot \frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}} =$$

$$\psi^{-(p-n)}(x) = \int^{(p-n)} \psi(x)\,dx + c_1 + c_2 x + \ldots + C_{p-n} \cdot x^{p-n-1},$$

idet $-(p-n)$ Differentiationer er det samme som $(p-n)$ Integrationer.

Der indkommer $(p-n)$ Konstanter. Ved at integrere Udtrykket for $\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}$ indføres $(2n-p)$ Konstanter, og man har det søgte Integral med $(p-n) + (2n-p) = n$ Konstanter.

$\underline{-p = -2n}$. I dette Tilfælde er venstre Side af (1) netop det Resultat, der faas ved at differentiere $\varphi(x) \cdot y$ n Gange og

$$\varphi(x) \cdot y = \psi^{-(p-n)}(x) = \psi^{-n}(x)$$

$$y = \frac{1}{\varphi(x)} \int^{(n)} \psi(x)\,dx + c_1 + c_2 x + \ldots + c_n x^{(n-1)}.$$

$\underline{-p < -2n}$. Ligningen indeholder nu alle Led fra $\frac{d^n y}{dx^n}$ til y. Den omskrives paa samme Maade som i forrige Tilfælde. Man kommer atter til Ligningen

$$\varphi(x) \frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}} = \int^{(p-n)} \psi(x)\,dx + c_1 + c_2 x + \ldots + c_{p-n} x^{p-n-1}.$$

Her er nu $(2n-p)$ negativ, og der maa da integreres $(2n-p)$ Gange ɔ: differentieres $(p-2n)$ Gange for at finde y. Integralet indeholder $(p-n)$ Konstanter, altsaa for mange, da $p > 2n$. Bortskaffelse af de overflødige sker som før.

I de sidste to Tilfælde bliver y algebraisk, rational, hel, hvis $\psi^{(n-p)}(x)$ er en algebraisk, rational, hel Funktion af x, og $\frac{\psi^{(n-p)}(x)}{\varphi(x)}$ giver som Kvotient en algebraisk, rational, hel Funktion.

Ex. 2. $(b+ax-x^3)\frac{d^3y}{dx^3}+2(a-3x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-6x\frac{dy}{dx}=x^5.$

Her er $\varphi(x)=b+ax-x^3$, $n=3$, $-p=-5$.

Man faar $\frac{dy}{dx}=\int^{(2)} x^5\,dx$, og det fuldstændige Integral bliver

$$y=\int\frac{\frac{x^7}{42}+c_1x+c_2}{b+ax-x^3}\,dx+c_3.$$

Ex. 3. $(b+ax-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+3(a-2x)\frac{dy}{dx}-6y=\frac{2}{x^3}.$

Her er $\varphi(x)=b+ax-x^2$, $n=2$, $-p=-5$.

Man faar

$$(b+ax-x^2)\,\frac{dy^{-1}}{dx^{-1}}=l.x+c_1+c_2x+c_3x^2,$$

og y faas ved Differentiation af Udtrykket

$$\frac{l.x+c_1+c_2x+c_3x^2}{b+ax-x^2}.$$

Ligninger af Formen (1) ville altsaa for alle positive og negative hele p bringes paa integrabel Form ved $(n+p)$ Differentiationer. $(2n+p)$ paafølgende Integrationer give et Udtryk for y, der ved Bestemmelse af de overflødige Konstanter bliver det almindelige Integral svarende til (1).

Integrationen af følgende sammensatte Ligning lader sig let fremstille ved Hjælp af det foregaaende.

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x)\frac{d^ny}{dx^n}-(n+p)f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\\&\sum_{r=2}^{r=n}(-1)^r\frac{(n+p)(n+p+1)\ldots.(n+p+r-1)}{[r]}.f_r(x)\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}}=\psi(x)\end{aligned}\right\}(2)$$

er en lineær Differentialligning mellem to Variable, hvor

$$f_r(x)=\varphi^{(r)}(x)+\frac{r.\beta}{n+p+r-1}.\tilde{\omega}^{(r-1)}(x).$$

$\varphi(x)$ og $\tilde{\omega}(x)$ ere begge rationale, hele, algebraiske Funktioner, henholdsvis højst af Graden n og $(n-1)$, og β er en Konstant. Samler man Led med afledede Funktioner af samme Funktion, faar man

$$\varphi(x).\frac{d^n y}{dx^n}+\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^r.\frac{(n+p)\ldots.(n+p+r-1)}{[r]}\varphi^{(r)}(x)\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}}$$

$$-\beta.\left\{\tilde{\omega}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.+\sum_{r=2}^{r=n}(-1)^{r-1}\frac{(n+p)\ldots(n+p+r-2)}{[r-1]}.\tilde{\omega}^{(r-1)}(x).\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}}\right\}$$

$$=\psi(x).$$

Ligningen bestaar altsaa af to Dele, hver af Formen (1), og de Resultater, man før fik for sidstnævnte Lignings Vedkommende, kunne nu anvendes her.

Uanset hvilken Værdi p har, blot det er et helt Tal, vil $(n+p)$ Differentiationer bringe (2) paa den integrable Form:

$$\varphi(x).\frac{d^{2n+p}y}{dx^{2n+p}}-\beta\,\tilde{\omega}(x)\frac{d^{2n+p-1}y}{dx^{2n+p-1}}=\psi^{(n+p)}(x);$$

der ved Substitutionen $\frac{d^{2n+p-1}y}{dx^{2n+p-1}}=z$ bliver lineær af 1ste Orden, nemlig

$$\varphi(x)\frac{dz}{dx}-\beta\,\tilde{\omega}(x).z=\psi^{(n+p)}(x). \qquad (2\,a)$$

Af dennes Integral

$$z=e^{\beta\int\frac{\tilde{\omega}(x)}{\varphi(x)}dx}\left[\int e^{-\beta\int\frac{\tilde{\omega}(x)}{\varphi(x)}dx}.\frac{\psi^{(n+p)}(x)}{\varphi(x)}dx+C\right] \qquad (2\,b)$$

faar man y ved en $(2n+p-1)$ dobbelt Integration og passende Bestemmelse af de overflødige Konstanter.

Man kan let overbevise sig om, at (2) er den eneste lineære n'te Ordens Differentialligning mellem to variable, der efter $(n+p)$ Differentiationer kan bringes paa Formen (2 a). Man behøver blot at undersøge, hvilken Ligning man kommer tilbage til ved en $(n+p)$ dobbelt Integration af Hjælpeligningen. Med symbolsk Skrivemaade faar man:

$$\left(\varphi(x)+\frac{d^{2n+p}y}{dx^{2n+p}}\right)^{-(n+p)}-\beta.\left(\tilde{\omega}(x)+\frac{d^{2n+p-1}y}{dx^{2n+p-1}}\right)^{-(n+p)}$$

$$=\psi(x).$$

Udføres Regningerne efter Binomialformlen, idet man anbringer Potensexponenterne som Differentiationsindices, kommer man netop

tilbage til (2). Skal Ligningen være af endelig Form og kun indeholde Led med positive Differentiationsindices, saa maa nødvendigvis $\varphi(x)$ og $\tilde{\omega}(x)$ være algebraiske, rationale hele Funktioner, af højst n'te og $(n-1)$'te Grad.

Der indeholdes i (2) følgende specielle Ligninger. $\beta = 0$ eller $\tilde{\omega}(x) = 0$ giver (1). $\tilde{\omega}(x) = 1$ giver

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} - [(n+p)\varphi'(x) + \beta]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \\ &\sum_{r=2}^{r=n}(-1)^r . \frac{(n+p)\dots(n+p+r-1)}{[r]}\varphi^{(r)}(x)\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}} \\ &\qquad = \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

der reduceres til

$$\varphi(x)\frac{dz}{dx} - \beta . z = \psi^{(n+p)}(x).$$

$$\tilde{\omega}(x) = \varphi'(x) \text{ giver}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} - (n+p+\beta)\varphi'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \\ &\sum_{r=2}^{r=n}(-1)^r . \frac{(n+p)\dots(n+p+r-2)(n+p+r(\beta+1)-1)}{[r]} . \\ &\qquad \varphi^{(r)}(x)\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}} = \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

der reduceres til

$$\varphi(x)\frac{dz}{dx} - \beta . \varphi'(x) . z = \psi^{(n+p)}(x),$$

hvis Integral er

$$z = (\varphi(x))^\beta \left(\int \frac{\psi^{(n+p)}(x)}{(\varphi(x))^{\beta+1}}dx + C_1\right).$$

$\underline{p > -n.}$

a) Er $\psi(x)$ en algebraisk, rational, hel Funktion af højst $(n+p-1)$'te Grad, bliver z, og ligesaa y algebraisk, rational, hel.

b) Det samme finder Sted, hvis $\frac{\psi^{(n+p)}(x)}{(\varphi(x))^{\beta+1}}$ giver som Kvotient en algebraisk, rational, hel Funktion, altsaa $\psi(x)$ er algebraisk, rational, hel.

Er $-p < -n$ bliver y kun algebraisk, rational, hel i sidste Tilfælde.

Sætter man $\varphi(x) = 1$, $\beta = 1$, kommer man til en Klasse Ligninger af samme Form som den, som Prof. Steen har behandlet i »Acta mathematica«.

NOGLE BESTEMMELSER AF PYRAMIDENS VOLUMEN.

(AF H. G. ZEUTHEN).

Jeg kunde have indført nærværende elementære Meddelelse i den Række, som jeg har givet Fællestitlen »Fra Mathematikens Historie«; thi alle de Bestemmelsesmaader, som jeg skal anføre, henhøre under antike Bestemmelser af Størrelser, som afhænge af $\int x^2 \, dx$. Ved ikke at gjøre det har jeg villet undgaa at faa Skinnet af at tillægge de gamle den fulde Bevidsthed om, at alle disse Fremgangsmaader kunne faa denne enkelte Anvendelse, hvorom jeg her samler dem.

Euklids Bestemmelse af en tresidet Pyramides Volumen bestaar af et Bevis for, at Pyramider med samme Højde forholde sig som Grundfladerne, efterfulgt af et derpaa grundet Bevis for, at den maa være Trediedelen af et Prisme med samme Højde og Grundflade. Dette sidste ses ved den samme Deling af Prismet, som bruges i moderne Lærebøger; men i det første Bevis gaar han noget anderledes tilværks, end det nu plejer at ske.

Han deler nemlig — hvad let gjøres — hver af de to tresidede Pyramider i 2 Prismer og 2 Pyramider med halvt saa store Længdedimensioner, saaledes at Pyramiderne afskjæres ved Snit, parallele med Grundfladen og med en Sideflade og altsaa blive ligedannede med den givne, og det ene af Prismerne har samme Grundflade og Højde som disse to Pyramider, det andet har en af deres Sideflader og Højden paa samme til Grundflade og Højde. Kalde vi den forelagte Pyramide p, og hvert af de lige store Prismer P_1, haves

$$p = 2P_1 + r_1,$$

hvor Resten r_1 bestaar af de to smaa Pyramider. Deles disse paa samme Maade, og kaldes de derved fremkomne Prismer P_2, faas, at

$$p = 2P_1 + 4P_2 + r_2,$$

hvor r_2 bestaar af 4 nye Pyramider, ligedannede med den givne. Fortsættelse giver

$$p = 2P_1 + 2^2 P_2 + \ldots . 2^n P_n + r_n.$$

Euklid bemærker, at $2\,P_1 > r_1$, og altsaa $r_1 < \frac{1}{2}\,p$. Da man paa samme Maade ser, at bestandig $r_n < \frac{1}{2}\,r_{n-1}$, slutter han deraf, at r_n kan gjøres mindre end enhver opgiven Grænse.

At tresidede Pyramider p og p' med samme Højde forholde sig som Grundfladerne g og g', udleder han dernæst af, at de Prismer P og P', med samme Nummer, som fremkomme ved Delingen, staa i dette Forhold. Man kan nemlig deraf slutte, at naar f. Ex. p' antages $> \frac{g'}{g}\,p$, bliver

$$p' - \frac{g'}{g}\,p = r'_n - \frac{g'}{g}\,r_n < r'_n,$$

hvor r'_n er Restleddet i den Række, som fremstiller Pyramiden p'. Her maa imidlertid $p' - \frac{g'}{g}\,.\,p$ have en vis Værdi ε; men ved at gjøre n tilstrækkelig stor, kan man opnaa at $r'_n < \varepsilon$, hvorved man kommer til en Selvmodsigelse. Denne undgaas kun, naar $\varepsilon = 0$.

Denne Omskrivning af Euklids Bevis (Exhaustionsbeviset) paa det moderne Tegnsprog har intet forandret i hans Tankegang. Den viser os, at Euklid beviser, at Pyramiderne fremstilles ved det, som vi kalde uendelige Rækker, hvis Konvergens netop sikres ved, at Resten kan gjøres mindre end en vilkaarlig opgiven Værdi ε.

Efter at have set dette, ligger det nær at undersøge, om ikke selve disse Rækker kunne benyttes til Pyramidernes Beregning — hvad Euklid dog ikke gjør. Det vil da strax følge af de forud kjendte Sætninger om Prismers Rumfang, at

$$P_1 = \frac{1}{8}\,P,\; P_2 = \frac{1}{8}\,P_1 \ldots P_n = \frac{1}{8}\,P_{n-1},$$

hvor P er Prismet med samme Grundflade og Højde som Pyramiden p. Den Række, som fremstiller p, er altsaa Kvotientrækken

$$p = P\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = \frac{1}{3} P.$$

Netop denne Fremgangsmaade anvender Archimedes til at beregne Arealet af et Parabelsegment, om han end bringer Beviset ind under Exhaustionsbevisets strenge Form. Den samme Udledelse kunde altsaa i Oldtiden ogsaa godt være anvendt paa den tresidede Pyramide.

En lille Ændring vil denne Udledelse faa, hvis man lader Bestemmelsen af den uendelige Rækkes Sum indgaa som et Led deri. Alene deraf, at de to Pyramider, hvoraf r_1 er sammensat, kunne dekomponeres ganske paa samme Maade i det uendelige som p, kan man slutte, at

$$\frac{p}{P} = \frac{r_1}{P_1}.$$

Kaldes Forholdet x, faas, idet $P = 8\,P_1$, ved Indsættelse i $p = 2\,P_1 + r$, at

$$x = \frac{1}{4} + \frac{x}{4},$$

altsaa $x = \frac{1}{3}$ Jeg nævner denne Fremgangsmaade, fordi den er noget beslægtet med den Maade, hvorpaa Archimedes benytter Dekompositionen af et Parabelsegment i Trekanter til Bestemmelse af dets Tyngdepunkt.

Den Fremgangsmaade, som i moderne Lærebøger mest anvendes til Beviset for, at Pyramider med samme Højde forholde sig som Grundfladerne — eller hvad der er tilstrækkeligt, at de ere lige store, naar Grundfladerne ere det — bestaar som bekjendt i Deling ved ækvidistante plane Snit parallele med Grundfladen. Denne Fremgangsmaade findes ikke i noget fra Oldtiden opbevaret Skrift anvendt til Pyramiders eller Keglers Beregninger[1]), men derimod vel et Sted hos Pappus til omvendt at overføre det

[1]) Det er ikke ganske rigtigt, hvad jeg siger derom i »Keglesnitslæren i Oldtiden« S. 275 nederst. Dette vil blive rettet i den tyske Udgave.

forud bekjendte Udtryk for Pyramidens Volumen paa et andet Omraade, hvor der ogsaa, hvis Opgaven skulde løses ved Integration, vilde være Brug for $\int x^2\, dx$.

I Oldtiden besad man dog ogsaa Midler til at beregne Pyramiders og Keglers Volumen paa denne med vor Integration stemmende Maade, som, naar Højden h er delt i n lige store Dele, og naar Grundfladen er g, giver

$$\frac{1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\, hg < p < \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots n^2}{n^3}\, hg.$$

Archimedes har nemlig netop til Brug for saadanne Undersøgelser bevist, at

$$1+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1+2^2+\ldots n^2,$$

hvorefter p let bestemmes, idet n kan gjøres saa stor, som man vil. Om andre virkelig gjennemførte Anvendelser af denne Fremgangsmaade, henvises til 20de Afsnit af »Keglesnitslæren i Oldtiden«.

For Fuldstændigheds Skyld skal jeg endnu paa Pyramidens Volumen anvende den indirekte paa Statiken grundede Fremgangsmaade, hvorved Archimedes, som han selv siger, først har fundet Parabelsegmentets Areal. Lad som før g og h betegne Pyramidens Grundflade og Højde, y et Snit parallelt med Grundfladen i Afstanden x fra Toppunktet. Da er

$$\frac{y}{g} = \frac{x^2}{h^2}$$

eller

$$h \,.\, y = x \,.\, \frac{x}{h}\, g.$$

Dette kan udtrykkes saaledes, at et Prisme med Grundfladen y, anbragt paa en Vægtstang i Afstanden h fra Ophængningspunktet, vilde holde Ligevægt med et Prisme med samme Højde og Grundfladen $\frac{x}{h}\, g$ i Afstanden x. Da disse Prismers fælles Højde kan gjøres saa lille som man vil, finder man, at hele Pyramiden p anbragt i Afstanden h vil holde Ligevægt med et tresidet Prisme, naar dettes ene Sidekant gaar gjennem Ophængningspunktet og har Afstanden h fra den modstaaende Sideflade, og naar denne har Størrelsen g og er parallel med Tyngderetningen.

Naar nu Beliggenheden af en Trekants Tyngdepunkt, der kan bestemmes ved Medianerne, antages bekjendt, vides det ogsaa, at Tyngdepunktet i det tresidede Prisme har Afstanden $\frac{2}{3}h$ fra Ophængningspunktet. Dets Volumen er $\frac{1}{2}hg$. Ligevægtsbetingelsen bliver altsaa

$$p \cdot h = \frac{1}{2} hg \cdot \frac{2}{3} h$$

eller

$$p = \frac{1}{3} hg.$$

EN BEMÆRKNING OM ANTALLET AF SPIDSER PAA EN KURVE AF ORDENEN n OG SLÆGTEN p.

(AF E. C. VALENTINER).

Har en Kurve, hvis Orden er n, Klasse n' og Slægt p, d Dobbeltpunkter, e Spidser og e' Vendetangenter, da har man

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - e,$$
$$n' = n(n-1) - 2d - 3e,$$
$$3(n' - n) = e' - e;$$

heraf udledes

$$n' = 2(n-1) + 2p - e,$$

og altsaa

$$3(2(n-1) + 2p - e - n) = e' - e$$

eller $e' + 2e = 3n + 6(p-1)$; man maa da have $e \leqq \frac{3}{2}n + 3(p-1)$. Denne Grænse for e kan dog ikke naas uden for visse Værdier af p; man faar nemlig for den højeste mulige Værdi af e $n' = \frac{1}{2}n + 1 - p - \varepsilon$, hvor $\varepsilon = 0$ for n lige og $\varepsilon = \frac{1}{2}$ for n ulige; altsaa maa man have $p \leqq \frac{1}{2}n - \varepsilon$. For $p = 0$ og n lige kan Grænsen naas, idet man faar en saadan Kurve i den, der er reciprok til en almindelig unikursal Kurve af Ordenen $\frac{n}{2} + 1$;

for $n = 5$, $p = 0$ kan specielt lægges Mærke til, at $e \leqq 4$. Det er ogsaa indlysende, at højere Værdier af e ville gjøre n' saa lille, at Ligningen $n = 2(n' - 1) - e'$ ikke vilde kunne tilfredsstilles uden ved en negativ Værdi af e'.

EXAMENSOPGAVER.

Institutbestyrerindeexamen. Dec. 1885.

Arithmetik.

1. Vis, at naar de ulige Tal fordeles i Grupper saaledes:

$$1;\ 3,\ 5;\ 7,\ 9,\ 11;\ 13,\ 15,\ 17,\ 19;\ \text{o. s. v.} \ldots,$$

vil Summen af Tallene i hver Gruppe være et Kubiktal.

2. At opløse Ligningerne

$$x \pm \sqrt{30 - x^2} = 4.$$

Løsningen maa gjøre Rede for, hvorledes de fundne Rødder passe i de opgivne Ligninger.

Opl. 1. Tallene i den n'te Gruppe danne en Differensrække paa n Led, hvis første Led er det ulige Tal med Nummeret $\frac{n}{2}(n-1)+1$, altsaa $n^2 - n + 1$, medens det sidste Led er $n^2 + n - 1$. Summen er altsaa n^3.

2. Kaldes den i Ligningen indgaaende Rodstørrelse y, haves

$$x + y = 4,\ x^2 + y^2 = 30.$$

x og y ere altsaa Rødderne i Ligningen

$$n^2 - 4n - 7 = 0, \text{ som giver } n = 2 \pm \sqrt{11}.$$

$x = 2 + \sqrt{11}$ svarer til et negativt y og er altsaa Rod i Ligningen $x - \sqrt{30 - x^2} = 4$, ligesom $x = 2 - \sqrt{11}$ er Rod i Ligningen $x + \sqrt{30 - x^2} = 4$.

Beregning.

Vis, at alle de trigonometriske Funktioner af en Vinkel kunne udtrykkes rationalt ved tg af den halve Vinkel [1]).

---

[1]) Denne Sætning, som sædvanlig først læres i Integralregningen, burde aabenbart optages i de trigonometriske Lærebøger. Red.

Opløs Ligningen

$$a \sin x + b \cos x = 0,$$

særlig naar $a = 0,70184\, c,\ b = 0,71233\, c.$

Opl. Da $\sin\frac{x}{2} = \pm\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}},\ \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}},$

Tegnene sammenhørende, faar man

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Fremdeles er

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \text{ og } tg\,x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}.$$

Derved faas strax Udtrykkene for $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ ved $tg\frac{x}{2}$,

Den forelagte Ligning giver, naar $tg\frac{x}{2}$ indføres,

$$tg\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},$$

og i Exemplet, hvor $a^2 + b^2 = c^2$,

$$x = 2p\pi + 44^0\ 34'\ 30''.$$

Geometri.

1. En Skraalinie OA danner Vinklen α med en Plan. Gjennem dens Skjæringspunkt O med Planen trækkes en Linie OB i Planen, saa at den danner Vinklen β med Skraaliniens Projektion. Hvor stor er Vinklen AOB? Hvilken Vinkel danner Planen AOB med den givne Plan?

Ex. $\alpha = 45^0,\ \beta = 30^0.$

2. Hvorledes bestemmes Polen for en given ret Linie, $ax + by + c = 0$, med Hensyn til Parablen $y^2 = px$?

De rette Linier $3x - 2y + 3 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ ere Polarer til Parablen $y^2 = 3x$. Find Polerne A og B for disse Linier. Find Arealet af Trekanten OAB, hvor O er Parablens Toppunkt.

Opl. 1. Projiceres A paa Planen i C og fældes CB vinkelret paa OB, findes de søgte Vinkler $AOB = u$ og $ABC = v$ let af Trekanterne AOB og ABC. Man faar

$$\cos u = \cos \alpha \cos \beta \text{ og } tg\, v = \frac{tg\, \alpha}{\sin \beta}$$

og i Ex.

$$u = 52^0\ 14'\ 19'',\ v = 63^0\ 26'\ 6''.$$

2. Ved Sammenholdelse af Ligningen $ax + by + c = 0$ med Ligningen for Polaren til Punktet (ξ, y) med Hensyn til Parablen $y^2 = px$ faas Polen for den nævnte Linie at være $\left(\frac{c}{a}, -\frac{bp}{2a}\right)$.

I Exemplet er A (1, 1), B (— 2,3) og det søgte Areal $\frac{5}{2}$.

Projektionstegning.

I en given Kugle lægges et Snit vinkelret paa Midten af en Radius, der er parallel med den lodrette, men skraa mod den vandrette Billedplan. Snittets Billeder tegnes baade før og efter en Drejning paa 90° om Kuglens lodrette Diameter.

LØSNING AF OPGAVERNE 86 OG 462.

86. Ved Beregning eller Konstruktion at bestemme en Firkant $ABCD$, naar man kjender Diagonalen AC, Vinklerne A og C, samt Projektionerne af den anden Diagonals Endepunkter paa Diagonalen AC. Der forlanges tillige en særskilt Undersøgelse af det Tilfælde, hvor A og C ere 90°.

Vi ville kalde B's Projektion paa AC B_0.

Lader man B glide paa BB_0, vil D beskrive et Keglesnit, der vil være en Ellipse, Parabel eller Hyperbel, eftersom

$$MB_0 \gtreqless \frac{AC}{2\sin(A+C)},$$ hvor M er AC's Midtpunkt.

Fire Punkter af dette Keglesnit tilbyde sig strax fremfor andre, nemlig A og C, D_0 svarende til B's Stilling B_0 og D_∞ svarende til et uendelig fjernt B. — Man ser let, at disse fire Punkter ligge paa en Cirkel og samtidig at D_0 og D_∞ ligge diametralt modsat paa samme. Endvidere kan anmærkes at Betingelserne:

$$MB_0 \gtreqless \frac{AC}{2\sin(A+C)}$$ svare til, at Linjen BB_0 har: intet, et eller to Punkter tilfælles med Cirklen $ACD_\infty D_0$.

Opgaven kan betragtes som løst, naar man vilkaarlig søger et Punkt til paa Keglesnittet, idet den da er tilbageført til den almindeligere: at søge Skjæringspunkterne mellem en ret Linie — Perpendikulæren fra D paa AC — og et Keglesnit gjennem 5 Punkter.

En anden, betydelig lettere Løsning faar man imidlertid i det Tilfælde, Keglesnittet bliver en Hyperbel. Naar man nemlig har fundet dennes Asymptoter, løses Opgaven ved Hjælp af den rent elementære Sætning: »Produktet af de Dele, hvori en Sekant deles ved et af dens Skjæringspunkter med Hyperblen og dens Skjæringspunkter med Asymptoterne er konstant for parallele Sekanter.« For nu at finde Asymptoterne, søges først Asymptoteretningerne. Disse findes ved at bemærke, at naar D rykker ud i det uendelige er: $\angle BAC + \angle BCA = \angle A + \angle C$ eller $= 2R - (A + C)$, hvorhos man altid, naar B glider paa BB_0, har:

$$\frac{tang\, BAC}{tang\, BCA} = \frac{CB_0}{AB_0}.$$

Heraf følger nemlig, at de Punkter B, som svare til de to uendelig fjerne Punkter D, ere Skjæringspunkterne mellem BB_0 og den med Cirklen $ACD_\infty D_0$ symmetriske Cirkel paa den anden Side af AC.

Til Konstruktion af Hyperblens Centrum tjener følgende Sætning: I et Parallelogram, hvis Sider ere parallele med en Hyperbels Asymptoter og hvis ene Par modstaaende Hjørner ligger paa Hyperblen, er Diagonalen gjennem det andet Par Hjørner en Diameter. — Vi kjende nemlig Asymptoteretningerne og tre Punkter, f. Ex. AC og D_0 paa Hyperblen.

Ere $\angle A$ og $\angle C$ Supplementvinkler, kan altid denne Konstruktion anvendes; thi Keglesnittet bliver da altid en Hyperbel. Hvis $A = C = R$, degenererer Keglesnittet i sine Asymptoter, da Punkterne A og C ligge paa en af disse. Man finder let, at Asymptoterne blive Linierne AC og en derpaa vinkelret ligelangt fra AC's Midtpunkt som BB_0, men paa modsat Side. Løsningen bliver altsaa enten en Firkant, hvor A, C og D ligge paa ret Linie, medens B er rykket ud i det uendelige, eller, ifald Perpendikulæren fra D falder sammen med den paa AC lodrette Asymptote, ubestemt, ɔ: man faar uendelig mange Løsninger.

At i en Kordefirkant $ABCD$, hvor $A = R$, Perpendikulærerne fra B og D ligge symmetrisk paa begge Sider af Diagonalen AC's Midtpunkt, ses ogsaa let geometrisk.

(Kristian Birkeland).

462. Bevis, at ved en rational Kurve af 4de Orden er Dobbeltforholdet mellem de 2 Tangentpar fra Røringspunkterne for en Dobbelttangent til det System af Keglesnit, der gaar igjennem Kurvens Dobbeltpunkter og desuden rører den i et 4de Punkt, konstant.

(Eigil Schmidt).

1. En Kurve af den i Opgaven omtalte Art kan opfattes som geometrisk Sted for Skjæringspunktet mellem de rette Linier

$$\left.\begin{aligned}[ux] &\equiv \alpha_1(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)x_1 + \alpha_2(b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2)x_2 + \varphi x_3 = 0,\\ [vx] &\equiv \alpha_1(ka_1\alpha_1 + la_2\alpha_2)x_1 + \alpha_2(kb_1\alpha_1 + lb_2\alpha_2)x_2 \qquad = 0,\end{aligned}\right\}(1)$$

idet $\varphi \equiv \varphi_0\alpha_1^2 + \varphi_1\alpha_1\alpha_2 + \varphi_2\alpha_2^2$, $\alpha_1 : \alpha_2$ en variabel Parameter, $x_1 : x_2 : x_3$ de løbende Koordinater, de øvrige Størrelser Konstanter; $x_3 = 0$ er Dobbelttangent til Kurven med Røringspunkterne

[1]) En geometrisk Løsning af denne Opgave er meddelt i Aarg. 1882, S. 68.

$x_3 = 0$, $x_1 = 0$ og $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, og $x_1 = x_2 = 0$ et Dobbeltpunkt; dette ses alt let ved at opløse Ligningerne med Hensyn til $x_1 : x_2 : x_3$ [1]).

2. Naar Ligningerne (1) have en Rod $\alpha_1 : \alpha_2$ fælles, da er (x) et almindeligt Punkt af Kurven; have de 2 Rødder fælles, da er (x) et Dobbeltpunkt; naar nu Ligningerne tænkes skrevne paa Formen

$$A_0\alpha_1^2 + A_1\alpha_1\alpha_2 + A_2\alpha_2^2 = 0,$$
$$B_0\alpha_1^2 + B_1\alpha_1\alpha_2 + B_2\alpha_2^2 = 0,$$

saa er altsaa for alle Kurvernes Punkter

$$\begin{vmatrix} A_0 A_1 \\ B_0 B_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 A_2 \\ B_0 B_2 \end{vmatrix}^2$$

og for Dobbeltpunkterne

$$\left\| \begin{matrix} A_0 \, A_1 \, A_2 \\ B_0 \, B_1 \, B_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Et Keglesnit gjennem Dobbeltpunkterne og rørende Kurven ses da at være

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ \beta_1^2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{vmatrix} = 0;$$

et saadant Keglesnit er da her

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + \varphi_0x_3 & a_2x_1 + b_1x_2 + \varphi_1x_3 & b_2x_2 + \varphi_2x_3 \\ ka_1x_1 & la_2x_1 + kb_1x_2 & lb_2x_2 \\ \beta_1^2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

eller efter Division med $(l - k)$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2\beta_2^2a_1a_2 + x_2^2\beta_1^2b_1b_2 - 2x_1x_2\beta_1\beta_2a_1b_2 + \\ 2x_3(x_1\mu_1 + x_2\mu_2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

3. For Røringspunkterne for Tangenter fra $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ til Keglesnittet (2) har man

$$x_2\beta_1^2b_1b_2 - x_1\beta_1\beta_2a_1b_2 + x_3\mu_2 = 0; \qquad (3)$$

ved Elimination af x_3 mellem (2) og (3) faas da

$$\left.\begin{aligned} x_1^2(\beta_2^2a_1a_2\mu_2 + 2\beta_1\beta_2a_1b_2\mu_1) - 2x_1x_2\beta_1^2b_1b_2\mu_1 - \\ x_2^2\beta_1^2b_1b_2\mu_2 = 0; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

[1]) Enhver rational Kurve kan opfattes som geometrisk Sted for Skjæringspunktet mellem to Linier, hvis Koordinater ere rationale Funktioner af én variabel.

paa lignende Maade faar man for Røringspunkterne for Tangenterne til Keglesnittet fra $x_3 = 0$ $x_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1^2\beta_2^2 a_1 a_2\mu_1 - 2x_1x_2\beta_2^2 a_1 a_2\mu_2 + \\ \qquad x_2^2(\beta_1^2 b_1 b_2\mu_1 + 2\beta_1\beta_2 a_1 b_2\mu) = 0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Det ses nu let, at det i Opgaven omtalte Dobbeltforhold er det mellem de 4 Linier fra $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, der fremstilles ved (4) og (5); det kommer da an paa at vise, at den simultane absolute Invariant for venstre Sider i (4) og (5) betragtede som Former i $x_1 : x_2$ er uafhængig af $\beta_1 : \beta_2$; skrives nu (4) symbolsk som $p_x^2 \equiv p_x'^2 = 0$ og (5) som $q_x^2 \equiv q_x'^2 = 0$, saa er Invarianten $\frac{(pp')^2\,(qq')^2}{(pq)^2\,(p'q')^2}$. Man finder nu

$$-(pp')^2 = 2\beta_1^2 b_1 b_2 B_1, \; -(qq')^2 = 2\beta_2^2 a_1 a_2 B$$

og

$$(pq)^2 \equiv (p'q')^2 = 2\beta_1\beta_2 a_1 b_2 B,$$

hvor B er lig med

$$\beta_1^2 b_1 b_2 \mu_1^2 + 2\beta_1\beta_2 a_1 b_2 \mu_1\mu_2 + \beta_2^2 a_1 a_2 \mu_2^2;$$

Invarianten er da $\frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$.

4. (Tilføjelse). Hver af Ligningerne (1) eller mere almindelig $[ux] + \lambda [vx] = 0$, hvor λ er en vilkaarlig Konstant, er Ligningen for en ret Linie, som indhyller et Keglesnit, der rører Kurven af fjerde Orden i 4 Punkter; Tangenterne fra Dobbelttangentens Røringspunkter til et saadant Keglesnit bestemmes ved

$$\alpha_1 \,.\, ((a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) + \lambda\,(ka_1\alpha_1 + la_2\alpha_2)) = 0$$

og

$$\alpha_2 \,.\, ((b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2) + \lambda\,(kb_1\alpha_1 + lb_2\alpha_2)) = 0;$$

Tangenternes anharmoniske Forhold er lig med det anharmoniske Forhold mellem Rødderne i disse Ligninger; dette er $\frac{a_1(1+\lambda k)}{a_2(1+\lambda l)} : \frac{b_1(1+\lambda k)}{b_2(1+\lambda l)} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}$; Sætningen gjælder da ogsaa, naar man i Stedet for Keglesnittene igjennem Dobbeltpunkterne og med Røring sætter Keglesnit, der røre i 4 Punkter.

(E. C. Valentiner).

LITERATUR.

Det vil sikkert interessere Læserne at erholde en let tilgængelig aarlig Fortegnelse over de i den skandinaviske Literatur fremkomne Arbejder af mathematisk Indhold. Som et Forsøg i denne Retning meddele vi den efterfølgende Bogfortegnelse for 1884, som godhedsfuldt er bleven os meddelt af Dhrr. S. A. Christensen, A. S. Guldberg og G. Eneström. Da man for alle strengt videnskabelige Arbejder har en fuldstændig Fortegnelse i Bibliotheca mathematica, have vi ment at kunne begrænse os til de Arbejder, som ere offentliggjorte i et af de skandinaviske Sprog; ligeledes ere de i dette Tidsskrift offentliggjorte Afhandlinger ikke særskilt medtagne.

Danmark.

N. Andersen: Regnebog med Tabeller for Borger- og Almueskoler. 1ste Del. 4de Udg. (Erslev). Kbhvn. 1884. 8vo. 48 p.

M. R. G. Assens: Arithmetikkens Begyndelsesgrunde til Brug i Borgerskoler og ved den forberedende Undervisning i lærde Skoler. 4de Opl. (Reitzel). Kbhvn. 1884. 8vo. 84 p.

J. Beyerholm: Regneøvelser for Begyndere. 2det Opl. (Klein). Kbhvn. 1884. 8vo. 40 p.

K. Christensen: Arithmetik for Begyndere. 2den omarb. Udg. (Hempel). Odense 1884. 8vo. 44 p.

S. A. Christensen og Hans Christensen: Indledning til Arithmetiken. (Trykt som Manuskript). (Bang). Kbhvn. 1884. 8vo. 12 p.

Facitliste til N. Jensens Regnebog. 1. Afd. 11. Opl. Odense 1884. 8vo.

N. Femmer: Opgaver i Hovedregning til Skolebrug. 1ste Del. 8de Udg. (Hagerup). Kbhvn. 1884. 8vo. 64 p.

Funktionslære og Ligningernes Theori. (Ikke i Boghandelen). 4to. 26 p.

J. P. Gram: Undersøgelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse. Kbhvn. 1884. 4to. 126 p. (Vidsk. Selsk. Skrifter 6. R. math. naturv. Afd. II, 6).

C. Hansen: Regne-Tabel II (Hovedregningsopg.). 2den Udg. Odense 1884. 8vo. 32 p.

C. Hansen: Tavleregningsopgaver IV. 5te Udg. Odense 1884. 8vo. 104 p.

S. G. Møller: Praktisk Regnebog. 1ste Afd. 2den Udg. (Philipsen). Kbhvn. 1884. 8vo. 64 p.

V. Nehm: Regnebog til Skolebrug og Selvundervisning. 1ste Del. (Schou). Kbhvn. 1884. 8vo. 56 p.

J. Petersen: Kinematik. (Høst). Kbhvn. 1884. 8vo. 70 p. (Anmeldt af Cand. mag. C. Juel i Tidsskr. for Math. 1884).

J. Petersen: Samme Bog paa Tysk ved Forf. og R. von Fischer-Benzon. 8vo. 80 p.

J. Petersen: Geometriske Opgaver til Skolebrug. 4de Udg. (Schønberg). Kbhvn. 1884. 8vo. 56 p.

J. Petersen: Analytisk Plangeometri. 1ste Del. 2den Udg. (Høst). Kbhvn. 1884. 8vo. 96 p.

J. Petersen: Lærebog i den elementære Plangeometri. 5te Udg. (Schønberg). Kbhvn. 1884. 8vo. 80 p.

Funktionslære efter Dr. Julius Petersens Forelæsninger. Kbhvn. 1884. (Autograferet). 4to.

Udtog af Differentialregningen efter Jul. Petersen. Kbhvn. 1884. (Autograferet). 4to.

Rumgeometri, analytisk. Kbhvn. 1884. 4to. 34 p. (Ikke i Boghandelen).

S. Schmidt: Arithmetiske Opgaver for Latin- og Realskoler. 2den forøg. Udg. (Lehmann & Stage). Kbhvn. 1884. 8vo. 48 p.

C. Seidelin: Elementær Lære i Projectionstegning. 2den Udg. (Hauberg). Kbhvn. 1884. 8vo. 68 p.

H. Smith: Resultater til Regnebog. I. Ubenævnte Tal. II. Benævnte Tal. (Gyldendal). Kbhvn. 1884. 8vo. 32 p. 40 p.

A. Steen: Mathematiske Opgaver for det første Examenstrin i 1857—83. (Reitzel). Kbhvn. 1884. 8vo. 56 p.

Tidsskrift for Mathematik, udgivet af J. P. Gram og H. G. Zeuthen. 5. Række. 2den Aarg. (E. Jespersen). Kbhvn. 1884. 8vo. 192 p. (6. Hefter).

J. H. Trahn: Hovedregningsopgaver. Svendborg 1884. 8vo. 64 p.

J. Vermehren: Elementær Arithmetik, navnlig til Brug i Pigeskoler. (Tryde). Kbhvn. 1884. 8vo. 58 p.

Norge.

Den norske Justerbestyrelses 8de Aarsberetning.

J. J. Åstrand: Lommebog ved Kjøb og Salg.

O. J. Broch: Logarithme-Tabel.

W. A. Eckhoff: Praktisk Regnebog for Middelskolen. Hefte 1—3.

A. Eliassen: Et Stykke Arithmetik (i Indbydelsesskrift fra Fr. Gjertsens Skole i Christiania for 1884).

A. M. Fevagen: Praktiske Regneopgaver for Pigebørn.

— Svar til samme.

J. A. Fjørtoft: Regnebog for Døvstummeskolen.

H. Geelmuyden: Nogle Meddelelser om de i Christiania udførte Zone-Observationer.

K. Getz: Geometrisk Konstruktionsbog. Hefte 1 og 2.

A. S. Guldberg: Kvotient- og Produktregning (i Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger for 1884).

J. S. Halvorsen: Mathematiske Opgaver.

— Facitbog til samme.

W. Hamilton: Geometri i Opgaver.

— Prøve paa en geometrisk Opgavesamling.

O. Johannesen: Opgaver i Arithmetik. II.

— Facitbog til samme.

H. K. Kjennerud: Regnebog for Folkeskolen. 2det Opl. H. 2.

S. Lie: Mathematiske Meddelelser I—III (i Christ. Videnskabsselskabs Forhandl. f. 1884),

S. Lie: Om Mathematikundervisningen i vore Skoler. (Sammesteds).

J. Nicolaisen: Regneskole I. Hefte 1—3.

— Faciter til samme.

C. T. Petersen: Logarithme-Tabeller. 2. Opl.

A. Sæhle: Tabeller for Reduktion af Kv.-Alen til Kv-Meter.

S. A. Sexe: Læren om de imaginære Størrelser, betragtet fra et elementært Standpunkt, samt om hvorledes man undgaar disse Størrelser. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.

Sverig og Finland.

P. Borgh: Räknekonstens grunder. Stockholm, Bonnier 1884. 8vo, 179 p.

W. Chauvenet: Minsta qvadratmetoden. Öfversättning jemte några få tillägg af V. af Klint. Stockholm. Samson & Wallin 1884. 4to, 128 p. Litografierad.

C. R. Collin: Om cirkelliniens delning. Stockholm 1884. 8vo, (4) + 44 p. — Lektorsdisputation (Hernösand).

A. Ch. E[dgre]n: Sophie Kowalevski. Ny illustrerad tidning (Stockholm) 1884, 269—270. — Biografi; denna biografi har i öfversättning eller utdrag blifvit införd i ett stort antal skandinaviska illustrerade tidningar och tidskrifter.

G. Eneström: Om några af Bierens de Haan nyligen utgifna matematiska skrifter från sextonhundratalet. Stockholm. Vetensk.-Akad., Öfversigt 41, 1884, no. 9, 191—197.

Euklides: Fyra första böcker, med smärre förändringar och tillägg utgifna af C. F. Lindman. Femte upplagen. Stockholm. Häggström 1884. 8vo, VI + (2) + 96 p.

Euklides: De sex första jemte elfte och tolfte böckerna utgifna af M. Strömer. Femtonde upplagan. Stockholm, Beyer 1884. 8vo, XX + 268 p.

G. Haglund: Samling af öfningsexempel till lärobok i algebra. Fjerde upplagan (omarbetad med afseende på de nya sorterna). Stockholm. Carlsson 1884. 8vo, 132 p.

W. E. Hedelius: Bidrag till teorien om lineära differential- och differenseqvationer med konstanta koefficienter. 4to, (2) + 34 p. — Göteborgs allmänna läroverks årsberättelse 1884.

A. G. Hällgrén: Lärobok i räknekonsten. Tredje upplagan. Luleå 1884. 8vo, 40 p.

Sophie Kowalevski: Om ljusets fortplantning uti ett kristalliniskt medium. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 41, 1884, no. 2, 119—121. — Integration af ett system partiella differentialekvationer af andra ordningen. — Öfvers. på franska: Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 98, 1884, 356—357.

L. Lindelöf: Anmärkning rörande teorin för pensionskassor. Helsingfors, Vetensk. soc., Öfversigt 26, 1884, 67—73.

N. Lindskog: Om elastiska skifvors böjningar. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 41, 1884, no. 4, 61—84.

E. J. Mellberg: Förberedande kurs i geometri. Helsingfors, Edlund 1884. 4to, 16 + 31 p. — På svenska och finska. — Recension: Finsk tidskrift 17, 1884, 447—450. (A. Ramsay).

Hj. Mellin: Om en ny klass af transcendenta funktioner, hvilka äro nära beslägtade med gammafunktionen. I, II. Helsingfors, Vetensk. soc., Acta 14, 15, 1884. 33 + 44 p.

Hj. Mellin: En grupp af transcendenta funktioner, hvilka besitta egenskaper liknande den, som tillkommer det reciproka värdet af den oändliga produkten $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n x)$. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 41, 1884, no. 5, 125—141.

Hj. Mellin: Om ett slag af oändliga produkter, hvilka kunna bestämmas genom gammafunktionen. Helsingfors, Vetensk. soc., Öfversigt 26, 1884, 170—176.

A. Meyer: Om kontinuitet hos konvergensområden. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt, 40, (1883), 1884, no. 9, 15—31.

G. Mittag-Leffler: Ett nytt bevis för Laurents theorem. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 40 (1883), 1884, no. 9, 5—13. — Öfvers. på franska: Liège, Soc. des sciences, Mémoires 12_2, 1884. 11 p. — Aftrykt: Acta mathem. 4, 1884, 80—88.

E. Neovius: Undersökningarna om cirkelns kvadratur. Finsk Tidskrift (Helsingfors) 16, 1884, 325—339.

L. Neovius: Om komplexa tals användning i geometrin. Helsingfors 1884. 8vo, (2) + 132 p. — Akademisk afhandling.

K. P. Nordlund: Räkneöfningsexempel för skolor. Första häftet. Sjette upplagan. Upsala, Schultz. 1884 8vo, 51 + 8 p.

K. J. Norstedt: Praktisk lärokurs i geometrien. Tredje upplagan. Stockholm, Kinberg 1884. 8vo, 208 + 16 p.

C. A. Nyström: Räknelära för folkskolor. I, II. Stockholm 1884. 8vo, 120 + 84 + 24 p.

E. Phragmén: Om konvergensområdet hos potensserier af två variabler. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 40 (1883), 1884, no. 10, 17—26.

E. Phragmén: En ny sats inom teorien för punktmängder. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 41, 1884, no. 1, 121—124.

E. Phragmén: En sats ur de elliptiska funktionernas teori. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 41, 1884, no. 9, 199—207.

A. Ramsay: Om geometrins grundbegrepp i den första undervisningen. Tidskrift utgifven af Pedagogiska Föreningen (Helsingfors) 1884. (2) + 10 p.

A. Ramsay: Proportionsläran i geometrien Tidskrift utgifven af Pedagogiska föreningen (Helsingfors) 1884. 20 p.

A. Rosén: Om fotpunktkurvors karakterer. Lund 1884. 8vo, (2) + 40 sid. — Akademisk afhandling.

P. Fr. Sievers: Första öfningsboken i räkning. Femte genomsedda upplagan. Stockholm, Sievers 1884. 8vo, (4) + 139 + 24 p.

P. A. Siljeström: Lärobok i räknekonsten. Stereotyperad upplaga. Stockholm, Norstedt 1884. 8vo, IV + 99 + 8 p.

E. Sjöblom: Om de entydiga integralerna till en lineer homogen differentialeqvation med dubbelperiodiska koefficienter. Stockholm, Vetensk. Akad., Öfversigt 41, 1884, no. 5, 155—168.

E. Sjöblom: Studier inom teorien för de lineera homogena differentialeqvationer, hvilkas koefficienter äro dubbelperiodiska funktioner. Helsingfors 1884. 4to, (4) + 43 + (1) p. — Akademisk afhandling.

K. H. Sohlberg: Beskrifning öfver stereometriska figurer. Stockholm, Norstedt 1884. 8vo, 10 p.

K. H. Sohlberg: Om sammansatta talbeteckningars allmängiltiga betydelse vid deras hänförande till olika storhetsslag. — Inbjudning till årsexamina vid högre latinläroverket å Norrmalm (Stockholm) 1884, p. 31—39.

K. H. Sohlberg: Praktisk lärokurs i planimetri och stereometri. Stockholm, Norstedt 1884. 8vo, 48 p.

E. A. Stenberg: En egenskap hos lineära och homogena differentialequationer. Stockholm, Vetensk. Akad. Öfversigt 41, 1884, no. 5, 143—153.

Welander: Räknebok för folkskolan. I. Stockholm, Norstedt. 1884. 8vo, 62 + 16 p.

P. P. Wistrand: Räkneexempel lämpade efter normalplanen. I. Göteborg, Bonnier, 1884. 8vo, 34 + 20 p.

C. G. Witt: Handledning i algebra. Stockholm, Witt 1884. 8vo, 161 + (2) p.

Rettelser i nærværende Aargang.

Side 63, L. 13 staar: = 0, læs: = r.

— 75, L. 8, foran Formel (12), staar: r lige eller ulige, læs: r ulige eller lige.

— 78, i Hovedet til Tavle over $\underline{r}$ staar: r, $\underline{r}$, Δ $\underline{r}$, læs: r, $\underline{\text{r}}$, Δ $\underline{\text{r}}$.

— 101, L. 6, i Tælleren af Formlen for q_n, staar:

$$d^{n-1}\left(p_1+p_2\frac{h}{[2]}+p_3\frac{h^2}{[3]}+\ldots\right),\text{ læs:}$$

$$d^{n-1}\left(p_1+p_2\frac{h}{[2]}+p_3\frac{h^2}{[3]}+\ldots\right)^{-n}.$$

— 160, I Opgave 523 indskydes efter Evolvente: »saaledes at Siden bliver Tangent til Kurven«.

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.	Norge.	Danmark.
A. V. Bäcklund, Lund.	C. A. Bjerknes, Christiania.	L. Lorenz, Kjøbenhavn.
A. Th. Daug, Upsala.	O. J. Broch, Christiania.	J Petersen, Kjøbenhavn.
H. Gyldén, Stockholm.	S. Lie, Christiania.	H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.
Sophie Kowalevski, Stockholm.	L. Sylow, Frederikshald.	
G. Mittag-Leffler, Stockholm.		

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Side

Från fysisk matematiska föreningen i Upsala. III. Meddeladt af *A. Olsson* 161

Integration af en Differentialligning. Af *A. Arneberg* 168

Nogle Bestemmelser af Pyramidens Volumen. Af *H. G. Zeuthen* . 175

En Bemærkning om Antallet af Spidser paa en Kurve af Ordenen *n* og Slægten *p*. Af *E. C. Valentiner* 179

Examensopgaver 180

Løsning af Opgaverne 86 og 462 182

Literatur. Bogfortegnelse for 1884 187

Rettelser 192

81-B

57

TIDSSKRIFT

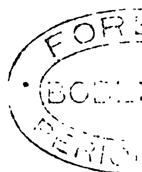
FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.



FEMTE RÆKKE.

Fjerde Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

Hoffensberg & Traps Etabl. — Kjøbenhavn.

1886.

FØRSTE HEFTE.

Det 13de skandinaviske Naturforskermøde.

Fra den norske Styrelse i Kristiania er der indløbet Indbydelse til Naturvidenskabens Dyrkere og Venner om at deltage i det 13de skandinaviske Naturforskermøde, som er bestemt til at afholdes i Kristiania iaar, Onsdag 7de til Mandag 12te Juli. De, som fra Danmark ønske at deltage i Mødet, anmodes om inden 15de Juni at melde sig hos den danske Generalsekretær Prof. Reisz.

Spørgsmaal til Diskussion paa Mødet anmeldes inden 15de Maj til den norske Generalsekretær Prof. H. Mohn i Kristiania, for at de i betimelig Tid kunne blive offentliggjorte.

Andre Foredrag ønskes ogsaa anmeldte forud til den sidstnævnte inden 1ste Juli.

Den danske Bestyrelse for de skandinaviske Naturforskermøder.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

FJERDE AARGANG.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1886.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

FEMTE RÆKKE.

FJERDE AARGANG.

1886.

Indhold.

Side

A. S. Bang, exam. polyt.:
Taltheoretiske Undersøgelser 70, 148
(Se desuden: Løste Opgaver og Opgaver til Løsning).
Kr. Birkeland, stud. real, Kristiania: Antallet af fri Bevægelser i et leddet Stangsystem 174
(Se desuden: Løste Opgaver).
Frans de Brun, Upsala:
(Se: Løste Opgaver og Opgaver til Løsning).
R. v. Fischer Benzon, Gymnasiallærer, Kiel:
(Se: Opgaver til Brug ved Undervisningen).
J. S. Fleischer, Løjtnant, Fyringeniør:
En Flade, fra hvilken Straaler udgaaende fra et fast Punkt tilbagekastes parallelt med en given Plan og gjennem en given Linie vinkelret paa denne 164
P. Foldberg, cand. mag.:
Et Theorem om den homogene lineære Differentialligning af 2den Orden 81
(Se desuden: Opgaver til Løsning og Opgaver til Brug ved Undervisningen).
J. P. Gram, dr. phil.:
Om Logarithmer og Antilogarithmer 1
(Se desuden: Mindre Meddelelser, Opgaver m. m.).
A. S. Guldberg, dr. phil, Lærer ved Krigsskolen i Kristiania:
Om Tverødder 97
S. Hertzsprung, Direktør ved Livforsikringsanstalten:
Nogle Bemærkninger om en Klasse kombinatoriske Opgaver 154
(Se desuden: Opgaver til Løsning).
P. N. Holst, cand. polyt.:
(Se: Opgaver til Løsning).
J. L. W. V. Jensen, Civilingeniør:
Om Raabe og Duhamels Konvergensbetingelse . . . 15
(Se desuden: Løste Opgaver og Opgaver til Løsning).
C. Juel, dr. phil.:
Om Keglesnitskorder, der fra et fast Punkt ses under ret Vinkel 33
(Se desuden: Opgaver til Løsning).
Chr. Krüger, cand. mag., Rektor ved Latin- og Realskolen i Helsingør:
(Se: Literaturanmeldelser).
N. Lund, Lærer i Slagelse:
(Se: Løste Opgaver).
N. Madsen, exam. polyt.:
(Se: Løste Opgaver, Opgaver til Løsning og Mindre Medd.).
Ol. Olsson, cand. phil., Upsala:
Några geometriska Satser 120
Jul. Petersen, dr. phil., Docent ved polyteknisk Læreanstalt:
(Se: Opgaver til Løsning).
K. Prytz, cand. mag., Docent v. polyteknisk Læreanstalt:
(Se: Mindre Meddelelser).
P. Rosenberg, stud. mag.:
(Se: Løste Opgaver).

Side

T. N. Thiele, dr. phil., Professor ved Universitetet:
(Se: Opgaver til Løsning).
E. C. Valentiner, cand. mag.:
(Se: Opgaver til Løsning og Opgaver til Brug ved Undervisningen).
H. Valentiner: dr. phil.:
(Se: Literaturanmeldelser; Opgaver til Løsning og Opgaver til Brug ved Undervisningen).
Edv. Zeuthen, Realskolebestyrer, Lemvig:
(Se: Opgaver til Løsning).
H. G. Zeuthen, dr. phil., Professor ved Universitetet:
Adolph Steen 65
En Udledelse af Betingelsen for, at en Flade af anden Orden er udfoldelig 128
Om Momentsætningen i Statiken. 145
Om den mathematiske Behandling af Gnidningsmodstanden 168
(Desuden: Redaktionsbemærkninger).

Løste Opgaver.

510, 521, 522, 443, 480, 121, 373 (Madsen, Brun, Birkeland, Bang, Gram) 20
316, 526, 532 (Bang, Lund, Madsen) 91
321, 537 (Jensen) 137
195, 241, 266, 411, 502, 538, 539, 528, 530 (Bang, Rosenberg) . . . 180
Løsning af Nr. 354 findes S. 71, jvfr. endvidere Noten S. 94.

Opgaver til Løsning.

525—532 (Gram, Brun, Jensen, Holst, Bang, Foldberg, H. Valentiner, Juel) 30
533—540 (Jensen, E. Zeuthen, Thiele, Foldberg, Madsen) 95
541—545 (Bang, Jensen, Petersen) 144
541, 546—549 (Bang, Hertzsprung, Juel, E. Valentiner). 180

Opgaver til Brug ved Undervisningen.

49—54 (H. Valentiner, Foldberg) 32
55—56 (v. Fischer—Benzon) 96
57—59 (E. Valentiner, Gram) 188

Examensopgaver.

4de Klasses Hovedexamen og Alm. Forberedelsesexamen, Jan. 1886 17
Polyteknisk Examen, Januar 1886 56
4de Klasses Hovedexamen og Alm. Forberedelsesexamen, Marts 1886 57
do. do. do. Juni 1886 60
Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt, 1886 83
Skolelærerexamen, Maj 1886 87
De lærde Skolers Afgangsexamen, Juni 1886 168
Magisterkonferens i Fysik, Decbr. 1886 172

Literaturanmeldelser.

H. G. Zeuthen, Keglesnitslæren i Oldtiden. (Valentiner) . . . 44
Emil Buchwald og Andr. Sch. Steenberg, Plangeometrisk Konstruktionsbog. (H. Z.) 64
E. Møller, Fejlenes Theori. (J. G.). 64
W. G. Spencer, Populær Geometri, ved Georg Bendix. (Chr. Krüger) 189

Mindre Meddelelser (Prytz, Gram, Madsen) 30, 143, 189

Oversigt over de numererede Opgaver i tidligere Aargange, som ikke ere løste:

2den Række 1ste Aargang:

Nr. 101 . . . . . . Side 16

2den Række 2den Aargang:

Nr. 127 . . . . . . Side 96
- 145 . . . . — 144
- 166 . . . . — 192

2den Række 3die Aargang:

Nr. 176 . . . . . . Side 178
- 181 . . . . — 179
- 200 . . . . — 183
- 208 . . . . — 184

2den Række 4de Aargang:

Nr. 227 . . . . . . Side 191

2den Række 5te Aargang:

Nr. 230 . . . . . . Side 177
- 244 . . . . — 180
- 261 . . . . — 183
- 263 . . . . — 184
- 264 . . . . — 184
- 271 . . . . — 185
- 272 . . . . — 185
- 274 . . . . — 186
- 275 . . . . — 186
- 277 . . . . — 186
- 278 . . . . — 187
- 279 . . . . — 187
- 281 . . . . — 187
- 283 . . . . — 188
- 284 . . . . — 188
- 285 . . . . — 188
- 286 . . . . — 188
- 287 . . . . — 188

2den Række 6te Aargang:

Nr. 288 . . . . . . Side 94
- 289 . . . . — 94

3die Række 1ste Aargang:

Nr. 292 . . . . . . Side 29
- 293 . . . . — 30
- 297 . . . . — 60
- 304 . . . . — 93
- 308 . . . . — 141
- 311 . . . . — 192
- 312 . . . . — 192

3die Række 2den Aargang:

Nr. 313 . . . . . . Side 78
- 314 . . . . — 78
- 315 . . . . — 78
- 319 . . . . — 109
- 324 . . . . — 141
- 330 . . . . — 190

3die Række 3die Aargang:

Nr. 338 . . . . . . Side 94
- 341 . . . . — 139
- 342 (Rettet S. 160) — 139
- 345 . . . . — 140
- 346 . . . . — 140
- 348 . . . . — 140
- 351 . . . . — 141

3die Række 5te Aargang:

Nr. 368 . . . . . . Side 152

3die Række 6te Aargang:

Nr. 376 . . . . . . Side 128

4de Række 1ste Aargang:

Nr. 379 . . . . Side 57
- 380 . . . . — 57
- 383 . . . . — 180
- 384 . . . . — 180
- 385 . . . . — 180

4de Række 2den Aargang:

Nr. 387 . . . . Side 61
- 392 . . . . — 127
- 393 . . . . — 127

4de Række 3die Aargang:

Nr. 400 . . . . Side 79
- 401 . . . . — 79
- 403 . . . . — 108
- 404 . . . . — 108
- 405 . . . . — 109
- 406 . . . . — 109
- 407 . . . . — 109
- 408 . . . . — 182
- 409 . . . . — 183
- 410 . . . . — 183
- 413 . . . . — 184

4de Række 4de Aargang:

Nr. 414 . . . . Side 143
- 415 . . . . — 144
- 417 . . . . — 144
- 418 . . . . — 144
- 422 . . . . — 173
- 428 . . . . — 192
- 429 . . . . — 192

4de Række 5te Aargang:

Nr. 431 . . . . Side 27
- 432 (Rettet S. 96) . — 27
- 433 . . . . — 59
- 434 (Rettet S. 96) . — 59
- 435 . . . . — 59
- 445 . . . . — 60
- 446 . . . . — 60
- 447 . . . . — 60
- 448 . . . . — 129
- 449 . . . . — 130
- 450 . . . . — 130
- 451 . . . . — 130
- 452 . . . . — 130
- 453 . . . . — 130
- 454 . . . . — 130
- 455 . . . . — 131

4de Række 6te Aargang:

Nr. 460 . . . . Side 29
- 461 . . . . — 29
- 464 . . . . — 30
- 481 . . . . — 73
- 486 . . . . — 185
- 491 . . . . — 185

5te Række 1ste Aargang:

Nr. 499 . . . . Side 92
- 500 . . . . — 92
- 501 . . . . — 92
- 503 . . . . — 92
- 504 . . . . — 92
- 505 . . . . — 92
- 508 . . . . — 172
- 509 . . . . — 172

5te Række 2den Aargang:

Nr. 519 . . . . Side 188

5te Række 3die Aargang:

Nr. 520 . . . . Side 64
- 523 . . . . — 160
- 524 . . . . — 160

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

OM LOGARITHMER OG ANTILOGARITHMER.

(AF J. P. GRAM).

1. Der er neppe mange Elever, hvem den bekjendte Definition: »Logarithmen af et Tal er Exponenten til den Potens, hvortil et andet givet Tal, Grundtallet, skal opløftes for at frembringe Tallet«, ikke i Begyndelsen har været en meget mørk Tale. I og for sig er der nu ingen Ulykke i, at der hører en vis Kraftanstrængelse til fra Elevens Side, for at fatte og fastholde Betydningen af en saadan Definition, det kan endog være gavnligt, for saa vidt den vundne Forstaaelse til Gjengjæld bliver fuldstændigere, naar Vanskeligheden først er overvunden. Men uheldigvis naar kun et lille Mindretal til den fulde Forstaaelse af Logarithmernes Betydning og endnu færre virkelig Indsigt i Brugen af en Logarithmetavle. Naar Examen er forbi, bliver denne sædvanlig betragtet som en af de kjedelige Bøger, med hvilke man engang for alle er færdig. Regnereglerne glemmes snart, og efter et Par Aars Forløb har man kun tilbage en dunkel Forestilling om nogle ubegribelige Tal, der kaldes Logarithmer, som man i sin Tid havde meget Besvær af, men om hvis egentlige Oprindelse man aldrig har haft noget klart Begreb. Naar selvfølgelig de faa undtages, som senere hen i deres Studier eller i Praxis nødes til ikke at glemme det engang lærte, tror jeg, at det her sagte passer paa den store Mængde af dem, som i deres Skoletid lære at benytte en Logarithmetavle. Dette Resultat er saa meget sørgeligere, som

Logarithmernes elementære Theori i enhver Henseende er saa særdeles simpel og tilmed i fortrinlig Grad egner sig saavel til at overbevise Eleven om Mathematikens praktiske Nytte som til at afgive Slutstenen paa den mest elementære Del af Mathematiken. Jeg nærer den Anskuelse, at der i hele den Del af Arithmetiken, der læres til Alm. Forberedelsesexamen, ikke er noget Afsnit, som vil kunne give Eleverne den Respekt for den mathematiske Videnskab som netop Logarithmelæren, men denne maatte da formes noget anderledes, end det sædvanlig sker.

Det er et Forslag til en saadan delvis Omforming, jeg herved skal forelægge d'Hrr. Lærere. Selvfølgelig ligger det udenfor min Opgave at udvikle Detaljerne just i den Form, hvori de bør fremsættes i en Skolebog, dette overlader jeg til Lærebogsforfatterne. For at forebygge Misforstaaelse skal jeg fremdeles udtrykkelig bemærke, at jeg ingenlunde anser det følgende for at være noget egentlig nyt. Dette vilde jeg saameget mindre kunne paastaa som netop i en af vore Lærebøger, Kapt. Madsens Elementær Arithmetik og Algebra, Kbhvn. 1872, er benyttet en noget lignende Fremgangsmaade, men denne i øvrigt saa fortrinlige Lærebog afviger ogsaa i adskillige Punkter fra de andre almindelig benyttede.

Hvad først og fremmest volder Eleven Vanskelighed ved Logarithmernes første Indførelse, er den Omstændighed, at de fremtræde uden tilstrækkelig i Øjne faldende organisk Sammenhæng med det foregaaende. Læren om Potens med bruden Exponent er vel først behandlet, men sædvanlig kun ganske kort; til irrationale Exponenter tages saa at sige intet Hensyn, og om den exponentielle Funktion som saadan har Eleven derfor ikke heller saa klar en Forestilling, at han strax kan indse Nødvendigheden eller Nytten af at indføre dens omvendte Funktion. Logarithmen fremtræder strax som saadan, tilmed sædvanlig i dens mest almindelige Form, med vilkaarlig valgt Grundtal, men om Muligheden af en saadan Omvending og af en virkelig numerisk Beregning faar Eleven kun meget sparsom Oplysning.

Alt dette gjør, at han, naar han begynder paa Afsnittet om

Logarithmer, føler sig paa et ganske fremmed Omraade og mister Blikket for, at de Sætninger om Logarithmer, der efterhaanden udvikles for ham, ikke ere noget som helst andet end simple Omskrivninger af, hvad han i Forvejen meget vel ved og strax kan faa frem ved Betragtning af Potenser af 10, og til dette Grundtal bør man i den elementære Logarithmelære principielt holde sig.

Hvad det altsaa kommer an paa, er først at gjøre Overgangen til Logarithmerne fra Læren om Potens noget mindre brat. Dette kan let ske, naar man vil anvende noget mere Tid paa »Potens i udvidet Betydning« og særlig paa Potenser af 10 og lade det dertil hørende Afsnit sammen med Logarithmelæren og dens Anvendelser følge som Slutstenen paa hele Systemet, idet altsaa Potensopløftning og Roduddragning for hele Exponenter samt Ligninger af første og anden Grad først ere fuldt behandlede. Herefter bør saa indføres Begrebet af Potens med vilkaarlig reel Exponent for en vilkaarlig valgt positiv Værdi af Roden a.

Betydningen af a^x for x positiv eller negativ hel er given. For andre Værdier af x kan den fastsættes vilkaarlig, naar blot Definitionen er saaledes, at a^x for hele x falder sammen med den tidligere Definition. For hele Exponenter gjælder Ligningen $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, og antages den samme gyldig for alle x og y, faas at $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, hvor vi fastsætte, selv om n er lige, altid at vælge den positive Værdi. At de heraf fremgaaende Regneregler ikke komme i Strid med det tidligere lærte, kan paa sædvanlig Maade paavises a posteriori.

For ogsaa at udvide Potensbegrebet til irrationale Exponenter, maa foruden de tidligere indføres den nye Forudsætning, at for $a > 1$ og $y > x$ vil, ogsaa naar x og y ere irrationale, haves

$$a^y > a^x,$$

hvoraf følger, at for $\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}$ er

$$\sqrt[n]{a^m} < a^x < \sqrt[n]{a^{m+1}} = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{a}.$$

Er $a = 1 + b$, saa er $\sqrt[n]{1+b} < 1 + \frac{b}{n}$, da $\left(1 + \frac{b}{n}\right)^n > 1 + b$,

saa at $\sqrt[n]{a}$, naar n forøges, kan bringes saa nær til 1, som man vil, og altsaa ogsaa stedse a^x findes med saa stor Tilnærmelse man vil. Den tilsvarende Værdibestemmelse for $a < 1$ fordrer ingen nye Forudsætninger.

Det vil være gavnligt her at vise, hvorledes man med de allerede lærte Midler virkelig kan udføre en saadan Beregning af a^x.

Dette kan bedst ske, naar man omskriver Exponenten til en Sum af et helt Tal og en Række Potenser af 2 med negative Exponenter, med andre Ord skriver den ikke hele Del i et 2-Tal System[1]). Sæt f. Ex., at man skal bestemme Værdien af $10^\pi = 10^{3\cdot141592\ldots}$. Saa findes først

$$\pi = 3 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} - \varepsilon,$$

hvor Fejlen $\varepsilon = 0\cdot0000089\ldots < \frac{1}{65536} = 2^{-16}$.

Følgelig bliver

$$10^\pi = 10^3 \,.\, 10^{\frac{1}{2^3}} \,.\, 10^{\frac{1}{2^6}} \,.\, 10^{\frac{1}{2^{10}}} \,.\, 10^{-\varepsilon}.$$

Her kunne nu de efter 10^3 følgende Faktorer findes ved Kvadratrodsuddragning med saa stor Nøjagtighed, man ønsker. Udregningen giver for disse Faktorer.

$$\sqrt[8]{10} = 1\cdot3335\,21432$$

$$\sqrt[64]{10} = 1\cdot0366\,32928$$

$$\sqrt[1024]{10} = 1\cdot0022\,51148,$$

medens $$\sqrt[65536]{10} = 1\cdot0000\,35135.$$

Vi faa altsaa, at naar Produktet af de tre første Faktorer kaldes A; vil haves

$$A > 10^\pi > A \,.\, 1\cdot0000\,35135,$$

hvorved altsaa de 4 første Cifre i det søgte Tal ville faas bestemte. Paa lignende Maade kan fortsættes, men Regningen bliver natur-

[1]) En saadan Omskrivning kan ogsaa i andre Tilfælde gjøre god Nytte, som Exempel kan nævnes den tilnærmede Tredeling af Vinklen, som faas af Formlen

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$$

ligvis desto besværligere, jo større Nøjagtighed man skal have. Dog er der at bemærke, at de sukcessive Kvadratrodsuddragninger kun behøve at foretages en Gang for alle. De ere i sin Tid udførte af Briggs indtil $\sqrt[2^{54}]{10}$ med 30 rigtige Decimaler. Ved Benyttelsen af disse Værdier bliver der altsaa kun tilbage at omskrive den givne Exponent i 2-Tal Systemet og udføre de fornødne Multiplikationer.

Paa lignende Maade kan man ogsaa beregne 10^x for det Tilfælde, at x vel er rational men ikke kan skrives som en Brøk, hvis Nævner er en Potens af 2. Saaledes kan f. Ex. beregnes Værdien af $10^{\frac{1}{10000}} = 1{\cdot}000023026\ldots$ Naar først denne er funden, kan man da ved sukcessive Multiplikationer danne sig en Tabel, som indeholder Værdierne af de Potenser af 10, hvis Exponenter udtrykkes ved en Decimalbrøk med 4 hvilke som helst Decimaler.

En saadan Tavle kaldes en Antilogarithmetavle, den kan konstrueres med vilkaarlig Nøjagtighed. En 4-cifret Tavle med Argumenter, som ere Tusindedele af Enheden, findes f. Ex. i Hoüels Logarithmetavle. En lille 8-cifret Tavle er under Titlen Udkast til Antilogarithmetabel med indtil 8 Zifre, af H. P., i 1880 udgivet af Ritmester Prytz. En 15-cifret Tavle med 3-cifret Argument er for nylig udgivet af samme Forfatter. Af andre Tavler kunne nævnes Filipowski's 7-cifrede Tavle og Dodson's: The Antilogarithmic Canon. London 1742, med 11-cifrede Antilogarithmer.

En Antilogarithmetavle er altsaa simpelthen en Potenstavle, ved hvis Hjælp man umiddelbart kan finde visse brudne Potenser af 10. Er $y = 10^x$ et af Tallene i Tavlen, saa kaldes selve Potensens Værdi Antilogarithmen til x, medens derimod x kaldes den briggiske Logarithme til y.

En saadan Tavle har som enhver anden Potenstavle de Egenskaber, som følge af, at alle Tallene, den indeholder, ere Potenser af samme Rod. Multiplikation af to Antilogarithmer $10^a \cdot 10^b$ sker umiddelbart ved i Tavlen at opsøge den Antilogarithme, som svarer til $a + b$ som Logarithme. Ligesaa simpelt foregaar Division, Potensopløftning og Roduddragning ifølge de bekjendte Sætninger.

Endvidere har Tavlen visse særegne Egenskaber, begrundede i »Grundtallets« Forbindelse med Decimalsystemet, navnlig den, at ogsaa Antilogarithmer til Logarithmer, som faas ved Addition eller Subtraktion af et helt Tal fra en af Tavlens Logarithmer, uden videre lade sig aflæse af denne.

Det er umiddelbart indlysende, at Tavlen vilde være en betydelig Lettelse ved Udførelse af de nævnte Regningsarter, hvis det var muligt til enhver given Logarithme strax at angive Antilogarithmen med samme Tilnærmelsesgrad som for de Tal, der findes i selve Tavlen og omvendt. Enhver Multiplikation vilde da væsentlig kunne reduceres til en Addition, en Division til en Subtraktion o. s. v., forbunden med Opslag i Tavlen.

Muligheden heraf kan paavises, idet man paa sædvanlig Maade ved Betragtning af selve Tavlens Differenser viser, at disse indenfor begrænsede Intervaller ere proportionale med de tilsvarende Logarithmers Differenser, og altsaa kunne findes ved Interpolation. Vil man gaa grundigere til Værks, kan man, hvis Tavlens Argument f. Ex. er 3-cifret, vise, at de 9 første Potenser af $10^{0 \cdot 0001}$ paa det nærmeste ere $1 +$ Størrelser, som ere proportionale med Exponenten, eller om man vil, at $10^{0 \cdot 0001 \, . \, k}$ paa det nærmeste er lig $1 + \frac{2 \cdot 30 \, k}{10000}$, hvilket uden Vanskelighed ses ved først at beregne $10^{0 \cdot 0001}$ paa den ovenfor angivne Maade. Heraf vil atter følge, at naar a er et 3-cifret Tal, saa vil den Korrektion, som skal anbringes paa $10^{\frac{a}{1000}}$ for at erholde $10^{\frac{a}{1000} + \frac{k}{10000}}$, hvor k antages 1-cifret, være

$$K = 2 \cdot 30 \, . \, \frac{k}{10000} \, . \, 10^{\frac{a}{1000}}.$$

Korrektionen bliver altsaa, saalænge det første Par betydende Cifre i $10^{\frac{a}{1000}}$ ikke forandres, væsentlig proportional med den tilsvarende Korrektion i Logarithmen. Den kan derfor enten findes direkte af denne eller ved ligefrem Interpolation.

Heraf læres altsaa, at man ved Hjælp af Tavlen kan finde

Antilogarithmen til en hvilken som helst forelagt Logarithme, uden Hensyn til, om denne findes iblandt Tavlens Argumenter eller ikke, og omvendt kan man fra enhver forelagt Antilogarithme vende tilbage til den tilsvarende Logarithme, selvfølgelig kun med den Tilnærmelse, som Tavlens Omfang tilsteder.

Tavlen kan altsaa ikke blot benyttes til at finde enhver Potens af 10, men ogsaa til at omskrive et vilkaarligt Tal til en saadan. Et forelagt Tals Logarithme bliver den Exponent, som skal benyttes for at omskrive Tallet til en Potens af 10.

Betydningen af en saadan Omskrivning er i Øjne faldende. Da Potenser af samme Rod multipliceres ved at addere Exponenterne, medens Roden bliver uforandret, saa vil en Multiplikation af flere Tal kunne foretages ved at omskrive hvert enkelt Tal til Potens af 10, addere Logarithmerne og søge Antilogarithmen til Summen.

Denne Regneregel, der bør udtrykkes som saadan og ikke som en Sætning om Logarithmer, er umiddelbart indlysende og behøver ikke noget andet Bevis end Henvisningen til den anførte Sætning om Potenser. Paa lignende Maade faas de andre tilsvarende Regneregler. Reglerne om Karakteristik og Mantisse bør være udviklede paa et tidligere Stadium strax efter Tavlens Opstilling.

Efter at saaledes Antilogarithmetavlens Konstruktion og Betydning er forklaret, bør Eleven øves i Brugen af den. En 4-cifret Tavle som den, der findes hos Hoüel, vil være fortrinlig skikket dertil, og først naar han er fortrolig med denne, bør Overgangen gjøres til de egentlige Logarithmetavler, hvor Antilogarithmen er Argument. Dette vil ikke volde nogen Vanskelighed; til Øvelse kan man lade Eleven selv beregne et lille Stykke af den nye Tavle ved Hjælp af Antilogarithmetavlen. Ligeledes kan man nu til yderligere Indøvelse formulere de tidligere lærte Regneregler som Sætninger om Logarithmer, saa at Funktionen fremtræder med et mere selvstændigt Præg som omvendt Funktion, og endelig kan man dertil knytte Betragtninger over Logarithmer med andre Grundtal end 10.

Dette anser jeg imidlertid, naar der ikke skal gaas videre,

som en Biting, derimod bør Logarithmernes Anvendelse paa Rentesregning selvfølgelig omhyggelig gjennemgaas og den nærliggende Analogi mellem en Rentetabel og Antilogarithmetavlen paapeges.

Naar Læren om Logarithmerne udvikles omtrent paa denne Maade, tror jeg, at den vil falde Eleven forholdsvis let. Hvor meget der skal medtages af selve Beregningerne for at paavise Muligheden af Antilogarithmetavlens Konstruktion, maa til Dels overlades til Lærerens Skjøn, men jeg anser det for at være af Betydning, at Eleven virkelig faar den Indsigt, som Udførelsen af de fornødne Operationer, der tilmed afgive en udmærket Øvelse i Regning, medfører.

Og det bør ikke tabes af Syne, at Logarithmernes Betydning paa det elementære Standpunkt alene er, at de afgive et Middel til Lettelse af visse Regneoperationer. Der bør derfor lægges den største Vægt paa, at Eleven virkelig lærer at benytte dette Hjælpemiddel, ikke blot til at beregne Talværdien af sammensatte Udtryk, men meget mere til Udførelsen af mere skematiske Beregninger, hvor selve Udtrykkene ere af simpel Form, men Mængden af Operationer af stort Antal. Jeg anser f. Ex. Beregningen af de reciproke Værdier af Kvadraterne af de første 50 firecifrede Tal ved Logarithmer for en langt mere gavnlig Øvelse end Beregningen af adskillige indviklede Udtryk af den Art, man saa ofte ser i Opgavesamlingerne. Før der er gjort et Par Hundrede Opslag i Tabellen, kan det ikke ventes, at Eleven skal have opnaaet en saadan Færdighed, at han kan benytte den som et virkeligt Hjælpemiddel. Dertil fordres ikke blot, at han efter grundig Overvejelse i hvert enkelt Tilfælde kan finde Resultatet fejlfrit, men ogsaa meget mere, at dette kan gjøres uden Famlen og uden unødvendige Opskrivninger af Formler, Interpolationer eller andre simple Mellemregninger.

Opnaaelsen af dette Resultat i Skolerne vilde i en overordentlig Grad lettes, naar man ved Logarithmernes Indøvelse, altsaa navnlig til Alm. Forberedelsesexamen, en Gang for alle vilde kaste de 5-cifrede Tavler overbord. Selv om disse ikke i Skolerne vare repræsenterede af saa uhensigtsmæssige Tavler som Lalande's og

Hoüel's, vilde de 4-cifrede Tavler ubetinget være at foretrække. Den ringe Forøgelse i Nøjagtighed har saa godt som intet at sige i Sammenligning med den Fordel, det er at have hele Tabellen samlet paa to Oktavsider, hvorved al Ombladen spares og megen Tidsspilde undgaas. Om man faar 5 eller kun 4 rigtige Cifre i Resultatet, har i Reglen kun liden Betydning, og skal der regnes med større Nøjagtighed, er man oftest nødt til at benytte 7-cifrede Tavler, hvis Indretning forstaas lettere, naar man kjender de 4-cifrede, end hvis man kun har lært at benytte de sædvanlige 5-cifrede. Til Opnaaelsen af større Nøjagtighed, navnlig ved Rentesregning, burde de derved hyppigst forekommende Logarithmer særskilt anføres med 8 Decimaler.

En god 4-cifret Logarithmetavle, der tillige burde indeholde en Antilogarithmetavle, samt et Supplement med forskjellige hyppig forekommende Logarithmer med flere Decimaler, maaske ogsaa en lille trigonometrisk Tavle, vilde kunne haves for en Bagatel og sikkert gjøre fuldstændig Fyldest ved den første Undervisning. Til Artium og Adgangsexamen ved Polyteknisk Læreanstalt og lignende Examiner, hvor der fordres trigonometriske Regninger, kunde der da tillige med Billighed kræves Kjendskab til Regning med den 7-cifrede Tavle.

Til Slutning et Par Bemærkninger om vore mest bekjendte 4- og 5-cifrede Tavler.

Saa godt som ingen af disse tilfredsstille de Fordringer, man maa stille til en god Logarithmetavle. Af 4-cifrede er den, der findes hos Hoüel, ganske god, navnlig er Antilogarithmetavlen meget tydelig. Bauer's 4-cifrede Logarithmer og Antilogarithmer vilde have været fortræffelig, hvis der ikke var ofret for megen Plads paa de lidet nyttige Interpolationstavler, hvoraf Følgen er bleven, at ikke alle 4 Cifre staa samlede.

Af de 5-cifrede Tavler — jeg taler her ikke om de trigonometriske Tabeller — er Bauer's den bedste. Den indeholder ogsaa en Antilogarithmetavle, men Formatet er lovlig stort. Indrettet paa samme Maade, men uden Antilogarithmer, er Professor Broch's lille Tavle. Dens betydeligste Mangel er det daarlige

Papir, hvorpaa den er trykt, Cifrene ere ogsaa lidt for store i Forhold til Pladsen. En fortræffelig 5-cifret Logarithmetavle, indrettet som Broch's med dobbelt Indgang, vilde den af Adjunkt P. H. Warming udgivne have været, hvis ikke Forfatteren havde gjort sig skyldig i en Fejl, som ogsaa af og til træffes i andre Tabeller, den nemlig, at Tabellen begynder paa Side 3 i Stedet for paa Side 2 eller 4. Deraf bliver nemlig Følgen, at ikke alle Tal, som høre til samme Tusende, staa paa de to samtidig opslagne Sider, hvilket letter Opsøgelsen af Tallene i høj Grad.

Den af Lalande saa vel som af Hoüel benyttede Opstilling gjør det umuligt hurtig at finde sig tilrette i Tavlen, og kan kun forsvares, naar Hovedvægten udelukkende skal lægges paa de trigonometriske Tavler. Tilmed er navnlig hos Lalande baade Format og Typer alt andet end heldige. Men der begaas i denne Henseende ikke sjeldent grove Forsyndelser, jeg skal som et Exempel nævne en for et Par Aar siden udkommen elegant udstyret lille Tavle af Henrici, der sælges til den billige Pris af 80 Pf. men kan anføres som en gavnlig Prøve paa, hvorledes et brugbart Tabelværk ikke bør være.

2. Det vil i denne Sammenhæng ikke være uden Interesse at stifte Bekjendtskab med den Maade, hvorpaa Opfinderen af de briggiske Logarithmer ad elementær Vej oprindelig har udført Beregningen af den Logarithmetavle, der i Virkeligheden danner Grundlaget for saa godt som alle de senere udgivne Tavler. Methoden findes udførlig fremstillet i Indledningen til Briggs' store Værk: Arithmetica Logarithmica, London 1624, som indeholder de 14-cifrede Logarithmer til alle hele Tal fra 1 til 20000 samt fra 90000 til 100000. Denne Indledning er i adskillige Henseender af saa stor Interesse, at den endnu i vor Tid fortjener, at man gjør sig bekjendt med den.

Briggs definerer ligesom Neper Logarithmerne som Tal, der ere saaledes forbundne med de tilsvarende, at Logarithmerne til Leddene i en Kvotientrække danne en Differensrække. Dennes første Led og Differens kan i øvrigt vælges vilkaarlig ved at fastsætte de Logarithmer, som skulle svare til to opgivne Tal. Briggs

viser, at det er fordelagtigst at sætte *log* 1 = 0, da derved Logarithmen til et Produkt (han betegner dette ved Navnet »factus«) bliver lig Summen af Faktorernes Logarithmer. Endvidere er det mest praktisk at sætte *log* 10 = 1, eller om man vil, lig 1, efterfulgt af et vist Antal Nuller.

For at finde et forelagt Tals Logarithmer, kunde man anvende den Methode at opløfte Tallet til en eller anden høj Potens og ligefrem tælle Antallet af Cifre i Resultatet. Saaledes vilde 2^{10000} blive et Tal, som skrives med 3011 Cifre, og da dette Tals Logarithme, som bliver 3010 + en Brøk, er 10000 Gange *log* 2, vil altsaa de første Cifre af denne faas bestemte. Denne Methode forkastes imidlertid som mindre praktisk.

En mere anvendelig Fremgangsmaade faas ved at bemærke, at $log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$, $log\sqrt[4]{10} = \frac{1}{4}$ o. s. v. De til de rationale Logarithmer 2^{-n} svarende Tal kunne altsaa findes ved fortsatte Kvadratrodsuddragninger. Briggs har udført disse Roduddragninger saa langt som til $\sqrt[2^{54}]{10}$ og finder for dette Tal P og dets Logarithme

$$P = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35$$
$$log\,P = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 82702\ 11815.$$

Naar man nu betragter disse Tal i Forbindelse med de nærmest foregaaende i Rækken, viser det sig, at for saadanne Tal af Formen $(1 + x)$, der skrives som 1 efterfulgt af 15 Nuller foran de betydende Decimaler, blive Logarithmerne ligefrem proportionale med selve Tallene minus 1 og kunne derfor umiddelbart beregnes ved Multiplikation, idet $log\,(1 + x) = x\,.\,0{,}4342\ldots.$

Ved Hjælp heraf kan et hvilket som helst Tals Logarithme findes, idet man af Tallet uddrager Kvadratroden, af denne atter Kvadratroden o. s. v. og saaledes fortsætter, indtil man kommer til et Tal, der skrives som 1 efterfulgt af saa mange Nuller, at dets Logarithme kan beregnes ved simpel Multiplikation.

Briggs anvender denne Methode til Bestemmelsen af *log* 2, idet han begynder med at søge $log\,1{,}024 = log\,2^{10} - 3$, han faar derved *log* 2 med 18 rigtige Decimaler. Af *log* 2 faas strax *log* 5, medens *log* 3 kræver en ny Beregning. I Stedet for direkte at

søge *log* 3, søges *log* 6 ved at gaa ud fra Tallet 1,0077696, som er $6^9 : 10^7$. Saaledes findes *log* 3 med 17 rigtige Decimaler.

Paa lignende Maade kan fortsættes, men man ser let, at det for at lette Arbejdet er af Vigtighed, at de Tal, hvis Logarithmer direkte bestemmes ved Kvadratrodsuddragning, ere nær ved 1, og Briggs viser, hvorledes man da kan anvende en Methode til Beregning af de sukcessive Kvadratrødder, som i Grunden er identisk med Udvikling af $\sqrt{1+x}$ i Række efter Potenser af x.

Skal man f. Ex. finde *log* 7, saa bemærkes først, at $7^2 = 49$ ligger imellem 48 og 50, hvis Logarithmer kunne findes af de allerede beregnede. Altsaa kjendes ogsaa *log* 2400. Men da $7^4 = 2400 + 1$, saa er $\log 7^4 - \log 2400 = \log\left(1 + \frac{1}{2400}\right)$, som derefter bliver at beregne ved Roduddragning.

De følgende Primtals Logarithmer findes paa samme Maade, idet B. stadig sørger for til deres Beregning at benytte et Tal, hvis to nærmeste have bekjendte Logarithmer. F. Ex. *log* 59 findes af $\log 59 . 19 = \log 1121$, idet $1120 = 56 . 20$ og $1122 = 66 . 17$, altsaa $1121^2 = 1120 . 1122 - 1$.

Paa denne Maade skrider Beregningen efterhaanden fremad, og man kan ikke andet end beundre den Ihærdighed, der har maattet kræves for at gjennemføre disse trættende Regninger. Det er dog ikke alle Logarithmer i Tavlen, som ere beregnede direkte paa denne Vis eller ved simpel Addition. En Del ere sikkert fundne ved Interpolation. Briggs helliger dennes Anvendelse ved Tavlens Brug en særlig Opmærksomhed og giver udførlige Anvisninger til at udføre Interpolationerne paa den bekvemmeste Maade, saavel ved Beregningen af Logarithmerne som af Tallene. Jeg skal ikke opholde mig ved disse men kun omtale en særlig Methode, han har angivet til at udføre en Femdeling af Intervallet, Briggs's berømte Quinquisectio.

Denne Methode, som det maa erindres er langt ældre end den Newtonske almindelige Interpolationsformel, fortjener at blive erindret som særdeles nyttig. Beviset for dens Rigtighed i de simpleste Tilfælde fordrer ingenlunde stort Apparat. Et fuldstændigt

Bevis er givet af Legendre i Connaissance de temps 1817, senere af Maurice, smsteds. 1847.

Jeg skal fremstille denne Methodes Anvendelse for det specielle Tilfælde, at 4de Differens er at betragte som konstant, og skal ved Udledelsen følge den Fremgangsmaade, som jeg antager det rimeligst, at Briggs har benyttet, da det er den, som ligger nærmest for Haanden.

Vi tænke os altsaa en Funktion $f(x)$, hvis 4de Differens er konstant $= e$, $f(x)$ kan da, naar en bestemt 3die Differens kaldes d, en 2den Differens c, en første b og en af selve Funktionens Værdier er a, umiddelbart konstrueres, saaledes som vist i efterfølgende lille Tavle, der giver den almindeligste Funktion, hvis 4de Differens er konstant. Vi antage nu, at denne Funktions Værdier kun ere givne for hver 5te Værdi af Argumentet $(\ldots -5, 0, 5, 10 \ldots)$, og at de tilsvarende Differenser B, C, D, E ere dannede. Opgaven er da fra disse at vende tilbage til de oprindelige Differenser.

Δ^{IV}	Δ^{III}	Δ^{II}	Δ	$f_{(x)}$	x	Differenser.		
	$d-5e$		$b-5c-5e$			$B_{-5/2}$		
e		$c-2d+7e$		$a-2b+7c+5d-7e$	-2			
	$d-4e$		$b-4c-2d+2e$					
e		$c-d+3e$		$a-b+3c+3d-5e$	-1			
	$d-3e$		$b-3c-3d+5e$					
e		c		a	0		C_0	E
	$d-2e$		$b-2c-3d+5e$					
e		$c+d-2e$		$a+b-2c-3d+5e$	1			
	$d-e$		$b-c-2d+3e$					
e		$c+2d-3e$		$a+2b-3c-5d+8e$	2			
	d		b			$B_{5/2}$	$D_{5/2}$	
e		$c+3d-3e$		$a+3b-3c-5d+8e$	3			
	$d+e$		$b+c+3d-3e$					
e		$c+4d-2e$		$a+4b-2c-2d+5e$	4			
	$d+2e$		$b+2c+7d-5e$					
e		$c+5d$		$a+5b+5d$	5		C_5	E
	$d+3e$		$b+3c+12d-5e$					
e		$c+6d+3e$		$a+6b+3c+17d-5e$	6			
	$d+4e$		$b+4c+18d-2e$					
e		$c+7d+7e$		$a+7b+7c+35d-7e$	7			
	$d+5e$		$b+5c+25d+5e$			$B_{15/2}$		

Hvorledes dette skal gjøres, vil umiddelbart ses, naar man opskriver et Skema som det omstaaende, hvor vi af Hensyn til Pladsen have indskrænket os til kun at medtage det strengt nødvendige. For de til det 5-dobbelte Interval svarende Værdier ere de ved store Bogstaver betegnede Differenser indførte paa deres naturlige Pladser i Skemaet. Deres Værdier ere anførte i det næste Skema.

x	$f_{(x)}$	Differenser.			
-5	$a-5b+25c-5d+50e$		$25c$		
		$5b-25c+5d-50e$		$125d-625e$	
0	a		$C_0=25c+50e$		$625e$
		$B_{5/2}=5b\quad+5d$		$D_{5/2}=125d$	
5	$a+5b+5d$		$C_5=25c+125d+50e$		$625e$
		$5b+25c+130d+50e$		$125d+625e$	
10	$a+10b+25c+135d+50e$				

Det ses af dette Skema, at man af de til det 5-dobbelte Interval svarende Differenser B, C, D, E umiddelbart kan finde de Differenser b, c, d, e, som indtage de tilsvarende Pladser i det fuldstændige Skema. For at udføre denne Bestemmelse dannes først de saakaldte dividerede Differenser

$$\beta = \frac{1}{5}B,\ \gamma = \frac{1}{25}C,\ \delta = \frac{1}{125}D \text{ og } \varepsilon = \frac{1}{625}E,$$

hvorefter erholdes

$$\begin{aligned} e &= \varepsilon, \\ d &= \delta, \\ c &= \gamma - 2\varepsilon, \\ b &= \beta - \delta. \end{aligned}$$

Begynder man nu Regningen med at indføre Værdierne af $f(x)$ for hvert femte Argument, kan hele højre Side af Skemaet strax beregnes. Heraf faas atter de dividerede Differenser, og de fundne Formler give da Midlet til efterhaanden at udfylde ogsaa venstre Side, idet de med fede Tryk fremhævede Størrelser næsten uden Regning kunne findes af dem paa højre Side, hvorefter alle de andre Differenser og de ubekjendte Funktionsværdier kunne faas ved simple Additioner. Ved gjennemgaaende Femdeling af

Intervallet i en Tabel udføres Regningen naturligvis fortløbende, saaledes at hver enkelt af de dividerede Differenser kun benyttes ved Bestemmelsen af de i Skemaet med fede Typer betegnede, tilsvarende korrigerede Differenser paa venstre Side.

Det er ikke vanskeligt at tage Hensyn til højere Differenser. Skal f. Ex. ogsaa 5te og 6te, som vi betegne ved f og k, medtages, saa faas, idet de tilsvarende dividerede Differenser ere φ og $\varkappa$,

$$k = \varkappa, \quad f = \varphi, \quad e = \varepsilon - 4\varkappa, \quad d = \delta - 3\varphi, \quad c = \gamma - 2\varepsilon - 1\tfrac{2}{3}\varkappa,$$
$$b = \beta - 2\delta - \tfrac{1}{5}\varphi.$$

Man ser imidlertid strax, at Regningen bliver noget mere sammensat. Ogsaa for Trisektionen kan der findes simple Formler, som vi overlade til Læseren selv at udvikle. Briggs giver i øvrigt en Tabel over Koefficienterne, som blive at benytte i alle de Tilfælde, hvor Methoden kan være praktisk anvendelig.

Briggs' Indledning indeholder endnu adskillige andre nyttige Anvisninger og Øvelsesexempler, men ved disse skal jeg ikke dvæle; jeg skal kun gjøre opmærksom paa, at en Methode, som mange Gange senere er opfunden og præsenteret som ny til Beregning af Logarithmer ved Hjælp af Logarithmer til Faktorer af Formen $1{,}000\ldots\alpha$, allerede er angiven af Briggs, der giver det fuldstændige Apparat og Anvisning til paa denne Maade at finde 14-cifrede Logarithmer til et vilkaarligt Tal.

OM RAABE OG DUHAMEL'S KONVERGENSBETINGELSE.

(AF J. L. W. V. JENSEN).

(Af et Brev til Professor H. G. Zeuthen.)

Tillad mig i Anledning af Deres Artikel i det sidste Hefte af Tidsskrift for Mathematik at henlede Deres Opmærksomhed paa, hvor simpelt Udledelsen af den Raabe-Duhamel'ske Konvergensbetingelse kan ske ved Benyttelse af min Fremgangsmaade i Artiklen »Om Rækkers Konvergens« i Aargangen 1884. Nedenstaaende har jeg tilladt mig at gjengive Beviserne, saaledes som jeg dengang tænkte mig dem førte ved Undervisningen.

Naar a_n og u_n ere positive, og for et vist og alle større n

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu > 0,$$

hvor μ er uafhængig af n, maa Σu_n være konvergent.

Bevis. Af Uligheden følger

$$u_{n+1} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}),$$

hvoraf udledes

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$
$$+ u_{n+m} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+m+1} u_{n+m+1}) < \frac{1}{\mu} a_n u_n,$$

hvormed Sætningen er bevist; tilmed giver $\frac{1}{\mu} a_n u_n$, da denne Størrelse er uafhængig af m, en højere Grænse for Resten af Rækken.

Tages $a_n = 1$, haves Cauchy's Konvergensbetingelse

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 > \mu, \text{ eller } \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \mu,$$

hvorved $\frac{1}{\mu} u_n$ er en højere Grænse for Resten.

Er derimod

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1,$$

maa Σu_n divergere, da $u_n < u_{n+1}$ viser, at u_n voxer med voxende n.

Tages $a_n = n$, haves Raabe's Konvergensbetingelse

$$n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) > \mu \text{ eller } n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + \mu,$$

hvorved $\frac{n u_n}{\mu}$ er en højere Grænse for Resten.

Er derimod

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1,$$

maa Σu_n divergere, da $n u_n < (n+1) u_{n+1}$, og $n u_n$ saaledes maa voxe med n.

EXAMENSOPGAVER.

4de Klasses Hovedexamen og alm. Forberedelsesexamen. Jan. 1886.

Arithmetik.

1. Til et fælles Foretagende indskyder A $\frac{1}{5}$, B $\frac{1}{3}$ og C $\frac{7}{15}$ af det dertil fornødne Beløb. D, som leder det, skal have $12\frac{1}{2}$ pro Cent af Udbyttet. Hvor mange pro Cent deraf tilkommer der hver af de tre Interessenter? Hvad faar hver, naar Udbyttet er 66600 Kr.?

2. Beregn x ved Logarithmer, naar

$$1 - x^{\frac{5}{2}} = 0{,}99515.$$

3. Af
$$x = \frac{ax + b}{cx + d}$$
findes x udtrykt ved a, b, c, d. Dernæst vises, hvorledes Udtrykket bliver simplere, naar $bc = ad$. I dette Tilfælde forlanges Prøve paa Rigtigheden af det fundne x.

Opl. 1. $100 - 12\frac{1}{2} = 87\frac{1}{2}$ pro Cent er der til Deling.

$$\text{A faar } \frac{87\frac{1}{2}}{5} = 17\frac{1}{2},\quad \text{B } \frac{87\frac{1}{2}}{3} = 29\frac{1}{6},\quad \text{C } \frac{7 \cdot 87\frac{1}{2}}{15} = 40\frac{5}{6} \text{ p. C.}$$

D skal have 8325 Kr., A 11655, B 19425, C 27195.

2.
$$x = \sqrt[5]{(1 - 0{,}99515)^2} = \sqrt[5]{0{,}00485^2},$$
$$\log x = \tfrac{2}{5} \log 0{,}00485 = 0{,}07430 - 1,\ x = 0{,}11866.$$

3. Ligningen ændres til
$$cx^2 + (d - a)\,x - b = 0,$$
hvoraf
$$x = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{2\,c}.$$
$bc = ad$ giver
$$x = \frac{a}{c} \quad \text{og} \quad x = -\frac{d}{c}.$$
Prøve af den sidste Værdi giver $x = \frac{0}{0}$; men sættes $b = \frac{ad}{c}$ ind i den forelagte Ligning, faar man, at denne Værdi er ubrugelig, idet
$$x = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c}.$$

Praktisk Regning.

1. A kjøber et Hus for 28000 Kr., betaler Omkostninger ved Handelen med $1\frac{1}{4}$ pro Cent af Indkjøbsprisen og anvender 1650 Kr. til Istandsættelse. Han lejer det ud for 9 pro Cent af hele den til Kjøb, Omkostninger og Istandsættelse medgaaede Sum. Skatter og Reparationer koste ham $27\frac{7}{9}$ pro Cent af den aarlige Leje. Til hvilken Pris maa han sælge Huset, naar 5 pro Cent af Salgsprisen skal være lig hans aarlige Overskud af Huset?

2. En Skomager kan med 20 Svende og 6 Drenge forfærdige 1000 Par Sko og 400 Par Støvler af bestemt Beskaffenhed i 6 Uger.

Naar der nu til hvert Par Støvler kræves $1\frac{1}{2}$ Gang saa lang Tid som til et Par Sko, hvor lang Tid behøves da til med samme Arbejdskraft at levere 10000 Par Sko og 3000 Par Støvler?

Naar dernæst en Svends Arbejdskraft er $1\frac{1}{2}$ Gang saa stor som en Drengs, hvor megen Arbejdskraft, udtrykt i Antal af Drenge, maa Skomageren da have for at gjøre den nævnte Levering færdig i 29 Uger?

Naar endelig Skomageren vil skaffe sig saadan Arbejdskraft, men kun kan faa 9 Drenge i alt, hvor mange Svende maa han saa antage?

3. Hvor længe varer det, inden en Kapital, som sættes paa Rente og Rentes Rente til $3\frac{4}{5}$ pro Cent, er fordoblet?

Opl. 1. I Alt koster Huset

$$28000\,(1 + 0{,}0125) + 1650 = 30000 \text{ Kr.}$$

Leje deraf bliver da 2700 og Skatter med Reparationer $27\frac{7}{9}$ p. C. er 750 Kr., saa at det aarlige Overskud er 1950 Kr. og $20 \,.\, 1950 =$ 39000 Kr. bliver Salgsprisen.

2. 400 Par Støvler kræve samme Tid som		600 Par Sko,
	dertil	1000 — —,
saa at i 6 Uger leveres et Arbejde af		1600 — —
Nu forlanges 3000 Par Støvler eller		4500 Par Sko,
	samt	10000 — —
	tilsammen	14500 — —.

Arbejdsmængden er proportional med Arbejdstiden, altsaa

$$\frac{1600}{14500} = \frac{6}{x}, \quad x = \frac{3\,.\,145}{8} = 54\tfrac{3}{8} \text{ Uger.}$$

Arbejdskraften er nu 20 Svende, lig med 30 Drenge, dertil 6 giver en samlet Arbejdskraft af 36 Drenge.

Arbejdstiden er omvendt proportional med Arbejdskraften, altsaa

$$\frac{54\frac{3}{8}}{29} = \frac{x}{36}, \quad x = \frac{15\,.\,9}{2} = 67\tfrac{1}{2} \text{ Drenge,}$$

af hvilke staa til Raadighed 9 Drenge. Resten $58\frac{1}{2}$ svarer til $\frac{58\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$ $= 39$ Svende.

3. $2 = (1 + 0{,}038)^x, \quad x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}038} = 18{,}6$ Termin.

Geometri.

1. Hvilken Sætning gjælder om de Stykker, hvori Halveringslinien af en Vinkel i en Trekant skjærer den modstaaende Side, og hvorledes bevises den?

Naar en Vinkels Halveringslinie deler Trekanten i Arealer paa 48 og 16 Kvadratfod, hvilket Forhold er der da imellem de Sider, som indeslutte Vinklen?

2. En Vinkel AOB og et Punkt P inden for dens Ben ere givne. Konstruer en Linie igjennem Punktet, som af Benene afskjærer Længder fra O proportionale med to givne Linier a og b.

3. To lige store Cirkler med Radius r skjære hinanden saaledes, at Radierne til Skjæringspunkterne ere vinkelrette paa hinanden. Hvor stor er Centrernes Afstand? Hvor stort er det for begge Cirkler fælles Areals Forhold til den af Radierne til Skjæringspunkterne dannede Figur?

π tages med 6 rigtige Decimaler.

Opl. 1. I Exemplet forholde de to Arealer sig som deres af Halveringslinien adskilte Grundlinier, saa at disses Forhold er som 3 til 1. Det samme bliver da Sidernes Forhold.

2. a afsættes paa OA, b paa OB og Endepunkterne forbindes. En Linie igjennem P parallel med Forbindelseslinien er den forlangte.

3. Radierne danne et Kvadrat, hvis Diagonal er $r\sqrt{2}$. Det søgte Areal er sammensat af to Segmenter paa 45°, hvis Areal tilsammen er $2\left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = \frac{1}{2}(\pi - 2)r^2$.

Forholdet er altsaa $\frac{1}{2}(\pi - 2) = 0{,}570796$.

LØSNING AF OPGAVERNE 510, 521, 522, 443, 480, 121 OG 376.

510. Der er givet et Punkt og et fuldstændig tegnet Keglesnit. Ved Benyttelse af dette samt Lineal og Passer ønskes gjennem Punktet lagt en ret Linie, hvorpaa Keglesnittet afskjærer en Korde af given Længde.

(H. G. Zeuthen).

Konstruktionen kan udføres ved Hjælp af følgende Sætning:

Naar en Korde i et Keglesnit drejer sig om et fast Punkt P, og en Cirkel bevæger sig saaledes, at den stadig gaar gjennem Kordens Endepunkter, medens Centrets Forbindelseslinie med det faste Punkt danner en konstant Vinkel (α) med Korden, vil Radikalaxen for to og to af disse Cirkler gaa gjennem et andet fast Punkt.

Tages nemlig P til Pol for et polært Koordinatsystem, hvis Axe er parallel med en af Keglesnittets, faar dette Ligningen

$$(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta) . r^2 + 2(D\cos\theta + E\sin\theta) . r + F = 0.$$

Man faar heraf, naar θ_1 betegner en vilkaarlig Kordes Vinkel, ϱ den tilsvarende Cirkels Radius, r_1 Radius vektor til Cirklens Centrum,

$$r_1 = -\frac{D\cos\theta_1 + E\sin\theta_1}{A\cos^2\theta_1 + B\sin^2\theta_1} . \sec\alpha,$$

$$r_1^2 = \varrho^2 + \frac{F}{A\cos^2\theta_1 + B\sin^2\theta_1}.$$

Idet nu R betegner Afstanden fra Cirklens Centrum til et andet fast Punkt Q, kan man vælge dettes Koordinater r' og θ' saaledes, at $R^2 - \varrho^2$ har en konstant Værdi K. Dertil fordres, at

$$R^2 - r_1^2 = r'^2 - 2r'r_1 \cos(\theta_1 - \alpha - \theta') = K - \frac{F}{A \cos^2 \theta_1 + B \sin^2 \theta_1}$$

tilfredsstilles af ethvert Par sammenhørende Værdier af r_1 og θ_1. Indsættes ovenstaaende Udtryk for r_1 ved θ_1, faas en Ligning af Formen

$$L \cos^2 \theta_1 + M \cos \theta_1 . \sin \theta_1 + N = 0,$$

hvor L, M og N ikke indeholde θ_1. Af Ligningerne

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0$$

kan man da bestemme r', θ' og K, og det viser sig, at de altid blive reelle.

Hermed er den anførte Sætning bevist.

For $\alpha = 0$ faas den specielle Sætning, der anvendes i den følgende Konstruktion:

Punktet Q kan bestemmes som Radikalcentrum for Cirkler over tre vilkaarlig valgte Korder som Diametre. Det maa ogsaa ligge i en Linie vinkelret paa P's Polar i dens Skjæringspunkt med Diametren gjennem P. Man kjender nu Q's Afstand fra den søgte Korde k's Midtpunkt, og dette maa altsaa ligge i en Cirkel C, der kan konstrueres. Opgaven er da at trække en Korde gjennem P, der halveres af C. Har Kurven et Centrum O, og antages Diametren gjennem P at skjære Kurven i S, kan man ved Hjælp af C konstruere en Cirkel C_1, der halverer den Korde k_1, som kan trækkes gjennem S parallel med k. C_1 og C har Ligedspunktet O, og Radiernes Forhold er $\frac{OS}{OP}$. k_1's andet Endepunkt findes da let, og dermed er ogsaa k bestemt. Der er i Almindelighed fire Løsninger.

Denne almindelige Fremgangsmaade ændres lidt ved Parablen. Trækkes gjennem P en Linie parallel med Axen, skjærende Kurven i S, maa Q ligge i Linien SQ, vinkelret paa Axen, da denne Linie repræsenterer den Cirkel, der svarer til den paa PS afskaarne uendelig store Korde. Ligger P i Parablens Axe, vil Q altid falde i Toppunktet. C_1 faas her ved at parallelforskyde C Stykket PS i Axens Retning.

Ved Hyperblen faas Q simplest ved at trække Linierne PS og PS_1 parallele med Asymptoterne og skjærende Kurven i S og S_1. Q er da Skjæringspunkt mellem de paa PS og PS_1 vinkelrette Linier SQ og S_1Q.

Korden kan dog ikke bestemmes paa denne Maade, naar P ligger i anden Asymptotevinkel, men man vil da kunne finde dens Skjæringspunkt P_1 med den Hyperbel H' gjennem P, der har Asymptoter tilfælles med den givne. P_1 ligger paa en Cirkel C', der let bestemmes ved Hjælp af C. Er den givne Hyperbel H ligesidet, bliver H' ligedannet med den, og Skjæringspunkterne med C' bestemmes da ved Hjælp af H. I andre Tilfælde kan man forandre Ordinaterne (idet Hyperblens Axer tages til Koordinataxer) i et saadant Forhold f, der let findes ved Hjælp af Asymptoterne, at H' bliver til en Hyperbel H_1 ligedannet med H, medens C' erstattes af en Ellipse, hvis Skjæringspunkter med H_1 dog kan bestemmes ved en Cirkel C_k. Da Ligningen for C' har Formen

$$x^2 + y^2 + ax + by + c - k^2 = 0,$$

hvor a, b og c ere uafhængige af Korden k, faar C_k Ligningen

$$x^2 + y^2 + a'(ax + f.by) + b' - a'k^2 = 0,$$

hvor de af k uafhængige Konstanter a' og b' kunne bestemmes ved at konstruere den Cirkel C_0, der svarer til $k = 0$. Man kan finde denne Cirkels to Skjæringspunkter med H_1, og da derhos Centret ligger paa Linien $y = f . \frac{b}{a} . x$, kan Cirklen tegnes. Den med C_0 koncentriske Cirkel C_k kan nu ogsaa konstrueres, og dens Skjæringspunkter med H_1 kunne da, ifølge Ligedannethedsmethoden, bestemmes ved Hjælp af H. De tilsvarende Punkter (P_1) i C' tilhøre de søgte Korder.

Ligger P i en af Hyperblens Asymptoter, bliver P_1 Kordens Skjæringspunkt med den anden Asymptote L. Drages nu Tangenten PT og gjennem Røringspunktet T en Korde k_1 parallel med k, beviser man let, at $2k_1 . PP_1 = k^2$. Heraf faas følgende Konstruktion:

Man inverterer L med P som Inversionscentrum og idet

Inversionspotensen er $\frac{1}{4} k^2$. Derved faas en Cirkel S'. De til Punkterne P_1 svarende inverse Punkter P' faas da ved at parallelforskyde S' Stykket PT i Tangentens Retning og føre de derved fremkomne Skjæringspunkter med den givne Hyperbel tilbage i S'. De søgte Korder indeholde Punkterne P'.

(N. Madsen).

Tilføjelse af Opgavens Stiller.

Foranstaaende Opgave fremkom som et Forsøg paa efter Pappos' Angivelser at finde ud af, hvad der kan have været Indholdet af Eratosthenes' tabte Skrift om Mellemstørrelser, og en derefter afpasset Løsning og Diskussion af Opgaven findes indrykket i fjortende Afsnit af mit Skrift om Keglesnitslæren i Oldtiden[1]). Pappos meddeler vel saa yderlig lidt, at der næppe var Udsigt til at opnaa ret stor Overensstemmelse med det anførte Skrifts Indhold; men min Hovedhensigt var ogsaa ved et Exempel at vise, hvorledes de i Oldtiden fuldkommen bekjendte Sætninger og Methoder kunde bruges.

Min Løsning afviger fra den foran staaende derved, at jeg, ved Siden af, at et geometrisk Sted fra den søgte Kordes Midtpunkt er en Cirkel — som vist foran —, tillige benytter, at dette Midtpunkt maa ligge paa et Keglesnit, ligedannet og ligedan beliggende med det givne, med Linien PO til Diameter (idet Betegnelserne ere de samme som foran). Bestemmelsen af dette Keglesnits Skjæringspunkter med Cirklen maa paa Grund af Ligedannetheden kunne ombyttes med en Bestemmelse af Skjæringspunkterne mellem det givne Keglesnit og en ny Cirkel. Denne samme Cirkel vil i Virkeligheden ogsaa blive benyttet i Hr. Madsens Løsning. Kun er i denne den Cirkel, hvorpaa Midtpunktet af Korden gjennem S skal ligge, benyttet som Gjennemgangsled for Bestemmelsen.

Imedens jeg for Diskussionens Vedkommende henviser til mit

---

[1]) Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter 6. Række, math. naturv. Afdeling III Bd. 1. Skriftet udkom først nogen Tid efter, at Opgaven var stillet i Tidsskriftet.

anførte Skrift, skal jeg her endnu kun bemærke, at Anvendelsen af det givne Keglesnit af sig selv viser sig at være illusorisk, naar dette er sammensat af 2 rette Linier. Ellers vilde Opgaven i dette Tilfælde kunne løses alene ved Hjælp af Lineal og Passer, hvilket ikke er Tilfældet.

(H. Z.)

521. Man skal bestemme Koefficienterne c saaledes, at følgende Lighed finder Sted for alle positive x:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} e^{-\nu^2 x} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{e^{\nu x}-1}.$$

(J. L. W. V. Jensen).

Insätt i stället för e^{-x} en qvantitet y. Man får:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} y^{\nu^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{y^{-\nu}-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu\, y^\nu}{1-y^\nu}$$

eller

$$1 + y^{1^2} + y^{2^2} + y^{3^2} + \ldots\ldots = \frac{c_0}{0} + \frac{c_1 y}{1-y} + \frac{c_2 y^2}{1-y^2} + \ldots\ldots$$

Nu är antaget, att $x > 0$. Deraf följer att $y < 1$. På grund häraf ega vi rättighet utveckla $\frac{1}{1-y^k}$ i en serie efter stigande potenser af y. Saaledes:

$$1 + y^{1^2} + y^{2^2} + y^{3^2} + \ldots = $$
$$\frac{c_0}{0} + yc_1 + y^2(c_1+c_2) + y^3(c_1+c_3) + \ldots$$

Genom att jemföre koefficienterna erhålles:

$c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$, $c_5 = -1$ o. s. v.

Vi vilja nu söka ett allmänt uttryck för c_k.

1) Vi anta till en början, att k är primtal och > 1.

Då är

$$c_1 + c_k = 0 \quad \therefore \quad c_k = -1$$

och

$$c_1 + c_k + c_{k^2} = 1 \quad \therefore \quad c_{k^2} = +1.$$

2) Är k = produkten af 2 primtal, hvardera > 1, finnes analogt med det föregående, att

$$c_k = +1 \quad \text{och} \quad c_{k^2} = +1.$$

3) Är k = produkten af 3 primtal > 1, så är

$$c_k = -1 \text{ och } c_{k^2} = +1.$$

4) I allmänhet är

$$c_k = 1,$$

om k kan uppdelas i jemnt antal primfaktorar, men

$$c_k = -1$$

om k kan uppdelas i udda antal primfaktorer.

Således är t. ex. $c_{127} = -1$, $c_{125} = -1$ o. s. v.

(Frans de Brun).

Anm. af Red. Almengyldigheden af det fundne Resultat ses lettest saaledes: Koefficienterne c_ν skulle tilfredsstille den almindelige Betingelse

$$\Sigma c_d = \begin{cases} 1, \text{ naar } \nu \text{ er et Kvadrattal,} \\ 0 \text{ i alle andre Tilfælde,} \end{cases}$$

idet Σc_d udstrækkes til alle Divisorer (1 medregnet) i Tallet ν. Er $\nu = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, hvor a, b, c betegne Tallets Primfaktorer, saa skal altsaa almindelig haves $c_\nu = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$. Men alle Divisorerne i ν ere Leddene i det udviklede Produkt

$$(1 + a + a^2 + \ldots a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots b^\beta) \ldots\ldots$$

Erstattes heri alle Primtallene a, b ... ved -1, saa faas netop Summen Σc_d, og denne Sum vil derfor blive lig Nul, undtagen naar alle Exponenterne α, β, γ ... ere lige, i hvilket Tilfælde hver af Produktets Faktorer bliver lig 1 og altsaa $\Sigma c_d = +1$.

(J. G.).

522. Træk en ret Linie, der skjærer to givne Cirkler saaledes, at de tre mellem Skjæringspunkterne beliggende Liniestykker blive lige store.

Den søgte Linies Skjæringspunkter med de givne Cirkler være SS', TT' og dens Skjæringspunkt med Centrallinien P. Perpendikulærerne på den søgte Linie gjennem S, S', T, T' træffe Centrallinien i M, M', N, N', og Korderne lodret på Centrallinien gjennem M og N være respektive $2\,K$ og $2\,K'$. For det første bemærkes, at M, M' og N, N' ligger i en Afstand $\frac{c}{4}$ — hvor c

er Centrallinien — fra de givne Cirklers Centrer. Endvidere har man:

$\frac{PM.PM'}{PN.PN'} = \frac{MS.M'S'}{NT.N'T'} = \frac{MS.MS''}{NT.NT''} = \frac{K^2}{K'^2}$, hvor S'' og T'' er de Punkter, hvori MS og NT forlænget, skjærer sine tilsvarende Cirkler. Heraf ses, at Punktet P's Potenser med Hensyn paa to Cirkler med Radius $\frac{c}{4}$ om de givne Centrer staar i givet Forhold. Det geometriske Sted for saadanne Punkter er, som bekjendt, en Cirkel, der gaar gjennem de Punkter, der deler de paagjældende Cirklers Fællestangenter indvendig og udvendig i Forholdet $\frac{K}{K'}$. Denne Cirkels Skjæringspunkter med Centrallinien giver de søgte Punkter P. Den videre Udførelse er ligefrem. Man ser, der er to Punkter P, og til hvert af disse svarer to symmetriske Stillinger af den søgte Linie.

(Kristian Birkeland).

443. I en Trekant, hvis Grundlinie ligger fast, er Topvinklen given. Paa Benene tegnes ligesidede Trekanter. Find Stedet for Midtpunktet af den Linie, der forbinder disses Toppunkter.

I Trekanten ABC ligger AC fast og $\angle B$ er given. ABC_1 og BCA_1 ere de ligesidede Trekanter paa Benene. Man søger da Stedet for Midtpunktet M_1 af C_1A_1.

Tegnes den ligesidede Trekant ACB_1 er $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle B_1CA_1 \cong \triangle ACB$, hvoraf følger, at de geometriske Steder for C_1 og A_1 ere lige store Cirkler (med Centrene O og P).

Lad C_2A_2 med Midtpunktet M_2 være en anden Stilling af Linien C_1A_1 og M Midtpunktet af OP; M, M_1 og M_2 halvere da Forbindelseslinierne af Vinkelspidserne i de kongruente Trekanter OC_1C_2 og PA_1A_2, hvoraf følger, at $\triangle MM_1M_2 \sim \triangle OC_1C_2$, altsaa $MM_1 = MM_2$, og da M er et fast Punkt, bliver altsaa det geometriske Sted for M_1 en Cirkel med Centrum i M.

(A. S. Bang).

480. Naar $2n+1$ er et Primtal, vil Summen af Kvadraterne af de n første hele Tal være delelig med $2n+1$.

Det samme er Tilfældet med Summen af Produkterne af to og to, tre og tre, ... $n-1$ og $n-1$ af disse Kvadrater.

$1^2 . 2^2 . 3^3 \ldots n^2 \pm 1$ er delelig med $2n+1$ (øverste eller nederste Tegn, eftersom n er lige eller ulige).

Er $2n+1$ et Primtal og a primisk dermed, ville Tallene

a, $2a$, $3a$ .... $2na$ give de samme Rester som

1, 2, 3 ..... $2n$, for Divisor $2n+1$,

altsaa maa ogsaa Summen af Produkterne af p og p af Kvadraterne paa Tallene i den første Række give samme Rest som den tilsvarende Sum af Tallene i den anden Række.

Kaldes den sidste Sum S_p, faar man heraf

$$(a^{2p} - 1) S_p \equiv 0 \ (mod\ 2n+1),$$

og, idet for a vælges en af de primitive Rødder for Primtallet $2n+1$, bliver for $p < n$, $S_p \equiv 0$ (her og i det følgende underforstaas for Modulus $2n+1$). Er $p = n$ gaar $2n+1$ op i Parentesen, saa man intet kan slutte om S_n.

For Kortheds Skyld betegner s_p Summen af Produkterne af p og p af de første n Kvadrattal og α_p den tilsvarende Sum af de næste n Kvadrattal; da er

$$S_p = s_p + s_{p-1}\alpha_1 + s_{p-2}\alpha_2 + \ldots s_1 \alpha_{p-1} + \alpha_p,$$

hvilket umiddelbart indses, naar de enkelte Led opløses i deres Addender.

Af $x^2 \equiv (2n+1-x)^2$ faar man, at de første n Kvadrattal give de samme Rester for Divisor $2n+1$ som de næste n Kvadrattal, hvoraf følger, at $\alpha_m \equiv s_m$, altsaa

$$S_p \equiv s_p + s_{p-1} \cdot s_1 + s_{p-2}s_2 + \ldots s_1 s_{p-1} + s_p.$$

Saafremt $s_1 \equiv s_2 \equiv s_3 \ldots \equiv s_{p-1} \equiv 0$, er

$$S_p \equiv 2s_p, \text{ altsaa } s_p \equiv 0.$$

Nu er $S_1 \equiv s_1 + s_1$, hvoraf $s_1 \equiv 0$, altsaa tillige for $p < n$

$$s_2 \equiv 0,\ s_3 \equiv 0 \ldots s_{p-1} \equiv 0.$$

For at vise, at $[n]^2 - (-1)^n \equiv 0$, har man af Wilsons Sætning, at

$$1 . 2 . 3 \ldots n (-n) (-n+1) (-n+2) \ldots (-2) (-1) \equiv 1,$$

hvoraf $(-1)^n [n]^2 \equiv 1$, hvorved Sætningen er bevist.

(A. S. Bang).

121[1]). At bestemme en Trekant af følgende 3 givne Størrelser: 1) Arealet T, 2) Summen af Sidernes Kvadrater, 3) Radius i den omskrevne Cirkel eller i en Berøringscirkel. (En Dilettant).

Trekantens Sider a, b, c (eller Funktioner af dem) ville være at bestemme ved en Ligning af 3die Grad. Er der først givet T, $a^2 + b^2 + c^2 = S$ og R, saa faas let en Ligning til Bestemmelse af Sidernes Kvadrater, idet nemlig

$$16\,T^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) =$$
$$4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

samt $4\,RT = abc$. Altsaa haves

$$a^2 + b^2 + c^2 = S,$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4\,T^2 + \tfrac{1}{4}S^2,$$
$$a^2b^2c^2 = 16\,R^2T^2.$$

Følgelig ville Rødderne i Ligningen

$$x^3 - Sx^2 + (4\,T^2 + \tfrac{1}{4}S^2)\,x - 16\,R^2T^2 = 0$$

bestemme Kvadraterne paa de søgte Sider.

Kjender man ikke R men f. Ex. r_a, Radius i Røringscirklen til Siden a, saa dannes let en Ligning til Bestemmelse af Størrelserne s, $s-b$ og $s-c$.

Man har nemlig foruden $s(s-a)(s-b)(s-c) = T^2$, samt $(s-a)\,r_a = T$ endvidere

$$s + (s-a) + (s-b) + (s-c) = 2s,$$
$$s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 = 4s^2 - 2s.2s + S = S,$$

altsaa

[1]) Ved at gjennemse en Del af de ældste uløste Opgaver har jeg fundet, at Grunden til, at Løsningen hidtil er udebleven, ikke altid er den, at Opgaverne ere vanskelige. Som et Exempel herpaa skal jeg meddele Løsningen af Opgave 121 i Haab om, at ogsaa andre maatte faa Lyst til at bidrage til at bringe gamle Opgaver ud af de uløstes Tal.

$$-s+(s-b)+(s-c)=-\frac{T}{r_a},$$
$$(-s)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=S-\frac{T^2}{r_a^2},$$
$$(-s)(s-b)(s-c)=-Tr_a,$$

hvoraf ogsaa

$$(-s)(s-b)+(-s)(s-c)+(s-b)(s-c)=\frac{T^2}{r_a^2}-\frac{1}{2}S.$$

De tre Størrelser $-s$, $s-b$, $s-c$ ere altsaa Rødderne i Ligningen

$$x^3+\frac{T}{r_a}x^2+\left(\frac{T^2}{r_a^2}-\frac{S}{2}\right)x+Tr_a=0.$$

For at Trekanten skal være mulig, maa den største Rod være negativ. Betegnes altsaa Rødderne ved $-x_1$, x_2 og x_3 saa faas

$$a+b+c=2x_1,$$
$$a-b+c=2x_2,$$
$$a+b-c=2x_3,$$

hvoraf $a=x_2+x_3$, $b=x_1-x_2$, $c=x_1-x_3$.

Med Hensyn til den nærmere Diskussion af Ligningerne, ved hvilken jeg ikke skal opholde mig, henvises til Ramus' Trigonometri S. 33, hvor en ganske lignende Opgave er behandlet. (J. G.)

376. Hvor mange reelle Rødder har Ligningen

$$adx^4+3d^2x^3+6bdx^2+4(b^2-ac)x-3cd=0?$$

For at undersøge Ligningen danner man dens to Invarianter i og j. (Se Clebsch': Binäre Formen S. 134). Det viser sig da, at Invarianten i her bliver

$$i=2\left[-ad\,.\,3cd-4\,.\,\tfrac{3}{4}d^2(b^2-ac)+3b^2d^2\right]=0.$$

Da j ikke forsvinder undtagen i specielle Tilfælde, og alle Konstanter antages reelle, bliver i^3-6j^2 negativ, hvoraf følger, at Ligningen har 2 reelle og 2 imaginære Rødder. Det kan ogsaa ved Udregning paa sædvanlig Maade vises, at den kubiske Resolvente, som kan skrives

$$m^3-\frac{i}{2}m-\frac{j}{3}=0,$$

her bliver ren kubisk, hvoraf det fundne Resultat ligeledes faas.

(J. P. Gram).

MINDRE MEDDELELSER.

I. **Mekanisk Bevis for, at Normalen halverer Vinklen mellem Brændstraalerne i Ellipse og Parabel.**

I A er fæstet en Snor[1]), i hvis anden Ende en Vægt p hænger. Snoren støttes ved en bevægelig Tridse i B og gaar over en anden Tridse i Højde med A. B bevæges saaledes, at p hverken hæves eller sænkes. Det ses da, at B beskriver en Ellipse med Brændpunkter i A og C.

Mangler Tridsen C, og bevæger man B saaledes, at p beskriver en vandret Linie, vil B følge en Parabel med lodret Axe, Brændpunkt i A og Parameter lig $2(AB + BD)$, idet D er Skjæringspunktet mellem Snoren og den vandrette Linie gjennem A.

Da der i begge Tilfælde intet Arbejde udføres ved Bevægelsen af B, maa denne Bevægelses Retning i ethvert Punkt være vinkelret paa Resultanten af de paa B virkende Kræfter. Resultantens Retning er Halveringslinien henholdsvis for $\angle ABC$ og ABD. Da Bevægelsesretningen er Tangenten, bliver altsaa Halveringslinien Normalen.

Tænkes en elastisk Snor udspændt mellem A og C, og tænkes et Punkt, der er bundet til at glide hen ad Snoren, at bevæge sig i Rummet, da vil Niveaufladerne i dette Punkts Kraftfelt være Omdrejningsellipsoider og Kraftlinierne Hyperbler, begge med Brændpunkter i A og C.

(K. Prytz).

OPGAVER TIL LØSNING.

525. Hvorledes løses Ligningen[2])

$$\sqrt{abc\,(a+b+c)} + \sqrt{abx\,(a+b+x)} + \sqrt{bcx\,(b+c+x)} + \sqrt{cax\,(c+a+x)} = 0?$$

(J. P. Gram).

[1]) Man bedes selv at tegne Figuren.

[2]) Jvfr. Opg. t. Br. v. Undv. Nr. 52.

526. Bevisa att

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 3^k \sin^3 3^{-k} x = \frac{3x}{4}.$$

(Frans de Brun).

527. Bevis at

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n + \frac{(x+1)^n}{x} + \frac{(x+2)^n}{x(x+1)} + \frac{(x+3)^n}{x(x+1)(x+2)} + \cdots}{y^n + \frac{(y+1)^n}{y} + \frac{(y+2)^n}{y(y+1)} + \frac{(y+3)^n}{y(y+1)(y+2)} + \cdots} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)}.$$

(J. L. W. V. Jensen).

528. Givet en Cirkel c med Radius r og en ret Linie af Længde a $(a > r)$. Der søges Fællestangenten til den givne Cirkel og til en Cirkel A med Radius a og med Centrum i den givne Cirkels vandrette Diameter, idet Røringspunktet for Cirklen A skal ligge paa C's lodrette Diameter.

(P. N. Holst).

529. I en fuldstændig Firkant indskreven i en Cirkel forbindes Midtpunkterne af de tre Par modstaaende Sider. Bevis, at den derved fremkomne Trekant er ligedannet med den Trekant, hvis Vinkelspidser ere Skjæringspunkterne mellem de modstaaende Sider.

(A. S. Bang).

530. Konstruer en Trekant, naar man kjender Halveringslinien v_A, Vinklen mellem v_A og a, samt Produktet af de Stykker hvori v_A deler a.

(P. Foldberg).

531. En ret Linie AB drejes en Vinkel α om det ene Endepunkt A, dernæst en Vinkel β om B; dernæst atter en Vinkel α om A og β om B, og saaledes fortsættes. I hvilken Stilling kommer Linien, efter at den nævnte Operation er gjentaget n Gange?

(H. Valentiner).

532. At bestemme de Cirkler, med Hensyn til hvilke et forelagt Keglesnit er sin egen reciproke Polarfigur.

(C. Juel).

OPGAVER TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN.

49. Hvor mange Cifre indeholder Perioden for en Brøk, hvis Nævner er $7^2 . 13^2$, naar Brøken forvandles til Decimalbrøk?

(H. Valentiner).

50. Paa hvor mange Maader kunne m Herrer og n Damer $(m > n)$ tage Plads om et rundt Bord saaledes, at aldrig to Damer komme til at sidde sammen? (H. Valentiner).

51. I en Trekant ABC indskrives en Cirkel. Dernæst drages en Tangent parallel med Siden a. I den afskaarne Trekant indskrives en ny Cirkel, til hvilken drages en Tangent parallel med b. I den paany afskaarne Trekant indskrives atter en Cirkel, til hvilken den med c parallele Tangent drages, og saaledes fortsættes i det uendelige. Hvad bliver da Summen af alle Cirklernes Arealer?

(H. Valentiner).

52. I en Cirkel A indskrives to Cirkler B og C, som røre hinanden og A. Dernæst tegnes en Cirkel D_1 som rører A, B og C. Fremdeles en Cirkel D_2 rørende A, B, D_1. Paa lignende Maade fortsættes, saaledes at Cirklen D_n almindelig rører Cirklerne A, B, D_{n-1}. Hvorledes afhænger Radius for D_n af Radierne i A, B og C.

Opl. Inverter om Røringspunktet mellem A og B.

(H. Valentiner).

53. Hvilken er den største og hvilken den mindste Værdi, som Forholdet mellem Halveringslinien af Vinklen A og Radius i den indskrevne Cirkel kan have i Trekanten med en given Vinkel A? (P. Foldberg).

54. Hvor højt skulde Washington Monumentet bygges, for at en Gjenstand, anbragt paa Toppen af det, ingen Vægt vilde have?

(Efter Annals of Mathematics).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund, Lund.

A. Th. Daug, Upsala.

H. Gyldén, Stockholm.

Sophie Kowalevski, Stockholm.

G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes, Christiania.

O. J. Broch, Christiania.

S. Lie, Christiania.

L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz, Kjøbenhavn.

J. Petersen, Kjøbenhavn.

H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

	Side
Om Logarithmer og Antilogarithmer. Af *J. P. Gram*	1
Om Raabe- og Duhamel's Konvergensbetingelse. Af *J. L. W. V. Jensen*	15
Examensopgaver	17
Løsning af Opgaverne 510, 521, 522, 443, 480, 121, 376	20
Mindre Meddelelser	30
Opgaver til Løsning	30
Opgaver til Brug ved Undervisningen	32

TIDSSKRIFT

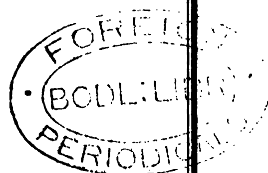
FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**



FEMTE RÆKKE.

Fjerde Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1886.

ANDET HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

OM KEGLESNITSKORDER, DER FRA ET FAST PUNKT SES UNDER RET VINKEL.

(AF C. JUEL).

De Korder i et Keglesnit, der fra et givet Punkt i dets Plan ses under ret Vinkel, indhylles som bekjendt af et nyt Keglesnit. Jeg skal her foruden at give Bevis for denne og nogle andre nærliggende Sætninger særlig undersøge, hvorledes Punktet skal være beliggende i eller udenfor Keglesnittets Plan, naar den nævnte Indhyllingskurve udarter i et Punktpar. Først betragtes Forholdene ved Cirklen, og vi have her:

Indhyllingskurven for de Cirkelkorder, der fra et Punkt P ses under ret Vinkel, er et Keglesnit, for hvilket Cirklens Centrum C er det ene Brændpunkt. (1).

Beviset bygges let paa den elementære Sætning, at det geometriske Sted for de Punkter, hvis Potenser med Hensyn til to givne Cirkler staa i et givet Forhold, er en Cirkel i det ved de givne bestemte Bundt, hvis Centrum deler Afstanden mellem de givnes Centrer i det givne Forhold. Man har aabenbart en analog Sætning, naar de givne Cirkler ombyttes med Kugler.

Lad nu MN være Korde i en forelagt Cirkel, der fra et Punkt P i eller udenfor dennes Plan ses under ret Vinkel. Nedfældes fra P den Vinkelrette PQ paa MN, har man $QM.QN:PQ^2 = -1$. Betragtes den Kugle, hvori den givne Cirkel er Storcirkel, kan man anvende Hjælpesætningen, og det geometriske Sted for de herved bestemte Punkter Q bliver en Kugle, der skjærer den givne Cirkels Plan π i en ny Cirkel, hvis Centrum C_1 ligger midt imellem Projektionen P_1 af P paa π og C. Indhyllingskurven for Korderne bliver altsaa et Keglesnit, for hvilket P_1 er det ene Brændpunkt, C_1 Centret og derfor C det andet Brændpunkt.

Indhyllingskurven udarter i Punktparret PC, naar P ligger paa den givne Cirkel. Lad os for at undersøge, i hvilke andre Tilfælde Udartning finder Sted, først antage, at P ligger i den

givne Cirkels Plan, saaledes at den tilhørende Indhyllingskurve udarter i Punktparret ST. Skjærer Forbindelseslinien mellem de to Punkter Cirklen i M' og N', der først antages forskjellige fra S og T, vil der gjennem hvert af disse Punkter f. Ex. M' gaa to sammenfaldende Tangenter til Indhyllingskurven, d. v. s., en Linie gjennem P vinkelret paa PM' maa i N' berøre den givne Cirkel. Da M' og N' kunne ombyttes, maa P altsaa være et Skjæringspunkt mellem to paa hinanden vinkelrette Tangenter til Cirklen. Ligger et af Punkterne S og T paa Cirklen, maa aabenbart P falde i samme Punkt. Man har altsaa:

Det geometriske Sted for de Punkter i en Cirkels Plan, der ligge saaledes, at Cirkelkorder, der fra et af dem ses under ret Vinkel, gaa gjennem et af to faste Punkter, er sammensat af to koncentriske Cirkler, af hvilke den ene falder sammen med den givne. (2).

Har den givne Cirkel Radien R, blive Radierne i de to andre Cirkler R og $R\sqrt{2}$. For et Punkt P af den sidste Cirkel blive de to Punkter, hvori den til P hørende Indhyllingskurve udarter, imaginære (lige saavel som de tilhørende Korder) begge beliggende paa Polaren til P med Hensyn til den givne Cirkel.

Vi gaa nu over til at bestemme det tilsvarende geometriske Sted, idet P ikke længer tænkes bundet til Planen. Da en Linie CZ, der i Centret C for Cirklen oprejses vinkelret paa dennes Plan, er en Symmetriaxe, kan man nøjes med at betragte de Punkter P af den søgte Beskaffenhed, der ligge i en Plan ZAB, hvor AB er en Diameter i Cirklen. Fra et søgt Punkt P projiceres Cirklen ved en Keglesnitskegle. I denne kan man let bestemme de tre Symmetriplaner: den ene er Planen PAB, de to andre staa vinkelrette paa denne og gaa gjennem hver sin af Halveringslinierne af Vinklerne mellem PA og PB. Keglen skal her være saaledes beskaffen, at de Planer, der skære den i to paa hinanden vinkelrette Frembringere, gaa gjennem en af to rette Linier a og b. Man ser umiddelbart, at disse to Linier maa ligge i en af Symmetriplanerne. Men det er omvendt en tilstrækkelig Betingelse, at en Symmetriplan σ indeholder to paa hinanden

vinkelrette Frembringere. Lad nemlig en Plan μ, der indeholder to paa hinanden vinkelrette Frembringere i Keglen skjære σ i en Linie a; da vil ogsaa den symmetriske Plan μ' til μ med Hensyn til σ indeholde to paa hinanden vinkelrette Frembringere, saa at der gjennem a gaar tre Tangentplaner til den Indhyllingsflade, der efter det foregaaende er en Kegle af anden Klasse, saa at denne maa udarte i et Liniepar.

Den ene af de oven bestemte tre Symmetriplaner vil ikke skjære Cirklen; i denne kunne Linierne ab ikke ligge, thi efter den analytiske Geometris formelle Betingelser kunne to konjugert imaginære Linier ikke staa vinkelret paa hinanden. Naar nu PQ er en Halveringslinie af Vinklen APB, der skjærer AB i Q, saaledes at en Linie gjennem Q vinkelret paa AB skjærer Cirklen i de reelle Punkter R og S, vil P ifølge det ovenstaaende være et Punkt af den søgte Beskaffenhed, enten naar $\angle APB = 90^0$, eller naar $\angle RPS = 90^0$. Den første Mulighed viser, at en Kugle med den givne Cirkel til Storcirkel er en Del af det søgte geometriske Sted. For et Punkt P af denne Kugle opløser Indhyllingskurven sig i to Punkter, hvoraf det ene er Projektionen af P paa Cirklens Plan, det andet Centret.

Idet vi derefter betragte den anden Mulighed, drejes P om AB ind i den givne Cirkels Plan π, hvorved det falder i et Punkt P' af en Cirkel, der har Centrum Q og Radius QR. Man kan vise, at det geometriske Sted for P' netop vil være Indhyllingskurven for disse Cirkler, som vi et Øjeblik ville kalde (Q). P' maa i saa Fald være et Røringspunkt mellem (Q) og en ydre Fællestangent t til (Q) og dennes Nabostilling (Q'). t gaar gjennem det ydre Lighedspunkt O for disse to Cirkler, og O vil være Skjæringspunktet mellem AB og Tangenten i R til den givne Cirkel, thi Ordinaten QR og dennes Nabostilling ere to parallele Radier i (Q) og (Q'). Da nu $AQBO$ ere fire harmoniske Punkter, og $P'Q$ og $P'O$ ere vinkelrette paa hinanden, vil $P'Q$ halvere Vinklen $AP'B$ ɔ: Røringspunktet P' netop være det samme som det ovennævnte Punkt P', der bestemtes ved at dreje P om AB ind i den givne Cirkels Plan. Da t herefter ogsaa er Tangent til

det søgte geometriske Sted nedlagt i π, vil dette altsaa være en saadan Kurve, at Tangenten i et vilkaarligt Punkt P' halverer Vinklen $AP'B$, altsaa være et Keglesnit, hvis Brændpunkter ere A og B. Figuren viser umiddelbart, at Keglesnittet her er en Ellipse med Halvaxerne R og $R\sqrt{2}$, idet R er den givne Cirkels Radius. Man har altsaa:

Det geometriske Sted for Punkter, som ligge saaledes, at de Korder i en Cirkel med Radius R, der fra et af disse ses under ret Vinkel, gaa gjennem et af to faste Punkter, er sammensat af en fladtrykt Omdrejningsellipsoide med Axerne $2R$ og $2R\sqrt{2}$ og en Kugle, der berører den første i Endepunkterne af Omdrejningsaxen. (3).

Man kan nu let se, hvorledes den betragtede Indhyllingskurve forandres, ved at P flytter sig i Rummet. Ligger P nær ved Cirklens Centrum, bliver Indhyllingskurven en Ellipse, og dette vedbliver den at være, saa længe P holder sig indenfor den ovennævnte Kugle. Falder P paa denne, udarter Kurven i et Par reelle Punkter og gaar derefter over til at blive en Hyperbel, saalænge P endnu er indenfor den i (3) nævnte Ellipsoide. Kommer P udenfor denne, bliver Indhyllingskurven imaginær, idet Overgang sker gjennem et Par konjugert imaginære Punkter[1]).

I Forbindelse med det i (3) nævnte geometriske Sted kan man betragte et andet, idet man spørger om det geometriske Sted for de Punkter P, hvorfra Trekanter indskrevne i en given Cirkel kunne projiceres ved et retvinklet Hjørne. Det maa her bemærkes, at der findes uendelig mange saadanne Trekanter, saafremt der blot findes en. Da Projektionen P_1 af P ind paa Cirklens Plan maa være Højdernes Skjæringspunkt, afhænger dette væsentlig deraf, at den Konstruktionsopgave: I en Cirkel at indskrive en Trekant ABC med givet Skjæringspunkt P_1 mellem

[1]) Da de betragtede Keglesnit alle have et fælles Brændpunkt i den givne Cirkels Centrum, svarer den sidstnævnte Overgang dualistisk til Overgangen fra en reel til en imaginær Cirkel gjennem et Par konjugert imaginære Linier: Cirkelasymptoterne.

Højderne, altid har uendelig mange Opløsninger. Forlænges nemlig Højden AP til den anden Gang skjærer Cirklen i A_2, ser man let, at Siden BC vil staa vinkelret paa Midten af P_1A_2. ABC konstrueres da let, idet man vælger A_2 vilkaarlig paa Cirklen, og vil kunne være reel, saafremt P_1 ligger indenfor en Cirkel koncentrisk med den givne og med Radius 3 R, idet R er den givne Cirkels Radius. Oprejses i P_1 en vinkelret paa Cirklens Plan, der i Længde bestemmes ved $P_1P^2 = \frac{1}{2} AP_1 . P_1A_2$, vil Hjørnet $P - ABC$ være retvinklet. Man finder nu let det geometriske Sted for Punkterne P. Fladen maa nemlig være en Omdrejningsflade, saa at man kun behøver at finde Meridiankurven i en paa Cirklens Plan vinkelret Symmetriplan. Skjærer denne Cirklen i A og B, bestemmes Ordinaten P_1P ved $P_1P^2 = \frac{1}{2} AP_1 . P_1B$ ɔ: det geometriske Sted for P er en Ellipse med Axeforholdet $\sqrt{2} : 1$, eller

Det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra Trekanter indskrevne i en Cirkel kunne projiceres ved retvinklede Hjørner, er en Omdrejningsellipsoide. (4).

Denne Flade er ligedannet med den i (3) nævnte i Forholdet $1 : \sqrt{2}$, idet Centret er Lighedspunkt.

Vi ville nu gaa over til at undersøge de Korder i et Keglesnit, der fra et Punkt P ses under ret Vinkel. Keglesnittet projiceres fra P ved en Keglesnitskegle, i hvilken der findes to Rækker af Cirkelsnit; betragtes blot en af disse Cirkler, haves: Indhyllingskurven for de Korder i et Keglesnit, der fra et fast Punkt i Rummet ses under ret Vinkel, er et Keglesnit. (5).

Vi ville her anse det for indlysende, at denne Sætning, der gjælder, hvor nær end P falder ved Keglesnittets Plan, ogsaa er rigtig, naar P falder i denne Plan[1]). Heraf følger, at naar tre

[1]) Man kan ogsaa ved at tage den reciproke Polarfigur til en Cirkel udlede dette af den ad elementær geometrisk Vej let beviselige Sætning, at det geometriske Sted for Skjæringspunktet af paa hinanden vinkelrette Tangenter til et Keglesnit er en Cirkel. Det ses herved tilmed, at P bliver et Brændpunkt for Indhyllingskurven.

gjennem samme Punkt Q gaaende Korder i et Keglesnit $\varkappa$ ses under ret Vinkel fra et og samme Punkt P, vil enhver gjennnem Q gaaende Korde fra P ses under ret Vinkel.

Da det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra et givet Liniestykke MN ses under ret Vinkel, er en Kugle over MN som Diameter, kan dette ogsaa udtrykkes saaledes, at enhver Kugle, der beskrives over en gjennem Q gaaende Keglesnitskorde som Diameter, maa indeholde to faste, alene ved Q bestemte Punkter. Betragtes Kuglernes Skjæringskurver med Keglesnittets Plan, haves altsaa:

Enhver Cirkel, der beskrives over en gjennem et fast Puukt gaaende Keglesnitskorde som Diameter, skjærer en fast Cirkel under ret Vinkel eller har almindeligere en fast Potens for et bekjendt Punkt. (6).

Denne Sætning kan benyttes til Løsning af visse Konstruktionsopgaver, f. Ex. den gjennem et givet Punkt Q at drage en Transversal, der skjærer et Keglesnit i to Punkter, hvis Afstande fra Q have et givet Produkt eller en given Differens. Den første af disse Opgaver løses let ved Passer og Lineal alene, den sidste er stillet af Hr. Prof. Zeuthen i dette Tidsskrift som Nr. 510. Løsningen gaar her ud paa at finde den afskaarne Kordes Midtpunkt M. Et geometrisk Sted for dette Punkt er et Keglesnit μ ligedannet med det givne, hvad der let ses, ved at erindre, at Supplementkorder ere parallele med Par af konjugerede Diametre; et andet bliver ifølge ovenstaaende Sætning en Cirkel, hvis Centrum C let konstrueres ved Passer og Lineal uafhængig af den givne Kordes Længde. Ved Ligedannethed kan man indføre det givne Keglesnit i Stedet for μ. Naar Længden er vilkaarlig, kan Opgaven kun da løses ved Passer og Lineal alene, naar Q ligger i en af Keglesnittets Axer, selv om dette specielt opløser sig i to rette Linier[1]).

Vi gaa nu over til at finde det geometriske Sted for de Punkter, der ligge saaledes, at Keglesnitskorder, der fra et af disse ses under ret Vinkel, gaa gjennem et af to faste Punkter, og be-

---

[1]) Jfr. en Løsning af Prof. Zeuthen i »Keglesnitslæren i Oldtiden«, fjortende Afsnit, S. 199, samt den i sidste Hefte meddelte Opløsning.

tragte først Parablen. Som Koordinataxer ville vi benytte Parablens Axe som X-axe, Tangenten i Toppunktet A som Y-Axe, og den vinkelrette i A paa XY-Planen som Z-Axe. I XY-Planen er det geometriske Sted for de søgte Punkter sammensat af den givne Parabel og dennes Ledelinie L, den sidste som geometrisk Sted for Skjæringspunktet mellem paa hinanden vinkelrette Tangenter til Parablen (jfr. S. 34). Man kan dernæst finde det geometriske Sted for de Punkter P af den ønskede Beskaffenhed, der ligge i XZ-Planen. Fra P skal Parablen nemlig projiceres ved en saadan Keglesnitskegle, at en Symmetriplan i denne indeholder to paa hinanden vinkelrette Frembringere (jfr. S. 35). Af Keglens tre Symmetriplaner gaar i dette Tilfælde den ene gjennem X-Axen, de to andre staa vinkelret paa denne og halvere Vinklerne mellem PA og en Parallel PU med Axen. Naar $\angle APU$ er ret, vil P ligge paa Z-Axen, hvilket altsaa er en Del af det geometriske Sted. Skjærer endvidere en Halveringslinie af Vinklen APU X-Axen i Q og en vinkelret paa X-Axen i Q Parablen i de reelle Punkter R og S, kommer det an paa at bestemme P saaledes, at $\angle RPS = 90^0$. Dette kan gjøres paa lignende Maade her som tidligere ved Cirklen, men det er lettere direkte at bevise, at det geometriske Sted bliver en Parabel, for hvilken A er Brændpunktet, medens Skjæringspunktet mellem L og X-Axen er Toppunkt. I saa Fald bliver nemlig PQ Normal N i den nye Parabel, hvis Ligning er $z^2 = p\left(x + \frac{p}{4}\right)$, saafremt den oprindelige har Ligningen $y^2 = px$, og man faar, idet xyz ere Koordinaterne til P,

$$\overline{PQ}^2 = N^2 = \frac{p^2}{4} + p\left(x + \frac{p}{4}\right) = p\left(x + \frac{p}{2}\right)$$
$$= \overline{QR}^2 = \overline{QS}^2,$$

hvoraf følger, at Vinklen RPS er ret.

Det geometriske Sted er da en Flade af tredie Orden, hvis Ligning allerede er bestemt ved de to fundne Snit. Symmetrien med Hensyn til XY-Planen og XZ-Planen viser, at z og y kun kunne forekomme i lige Potenser i Fladens Ligning; denne maa altsaa have Formen:

$$Ax^3 + Bxy^2 + Cxz^2 + Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + Gx + H = 0.$$

Snittet i XY-Planen er

$$\left(x + \frac{p}{4}\right)(y^2 - px) = 0,$$

hvoraf $A = 0,\ D = -p,\ E = \frac{p}{4},\ G = -\frac{p^2}{4},\ H = 0;$

Snittet i XZ-Planen er

$$x\left(z^2 - px - \frac{p^2}{4}\right) = 0,$$

hvoraf $C = 1$. $F = 0$. Den søgte Ligning er da:

$$x(y^2 + z^2) - px^2 + \frac{p}{4}y^2 - \frac{p^2}{4}x = 0.$$

Man faar det bedste Overblik over Fladen ved at skjære den med Planer med Ligningen $x = \alpha$. Skjæringskurverne blive da Keglesnit, hvis Projektioner paa YZ-Planen let ses alle at ville have Brændpunkter i de faste Punkter $\left(0,\ 0,\ \pm\frac{p}{2}\right)$; naar α er positiv, blive Kurverne Ellipser, naar $-\frac{p}{4} < \alpha < 0$, blive de Hyperbler, ellers imaginære.

For nu at se, hvorledes den omhandlede Indhyllingskurve forandrer sig ved at P flytter sig i Rummet, bemærkes, at de to Punkter, hvori Indhyllingskurven kan udarte, ville falde sammen, naar P befinder sig i Fladens to reelle Dobbeltpunkter, E og F, hvis Koordinater ere $\left(0,\ 0,\ \pm\frac{p}{2}\right)$[1]). Dette udledes let ved at bemærke, at en Parabel er sin egen reciproke Polarfigur med Hensyn til en (imaginær) Cirkel, hvis Centrum er Toppunktet A, og hvis Radies Kvadrat er $-\frac{p^2}{4}$. Ved E og F deles Parablen $z^2 = p\left(x + \frac{p}{4}\right)$ i to Dele, af hvilke den uendelige svarer til en i to reelle Punkter opløst Indhyllingskurve, medens den endelige Del svarer til en i to konjugert imaginære Punkter opløst. For Punkter indenfor den Del af Fladen, der har en skarp Bøjning

---

[1]) Den har desuden to imaginære.

langs Z-Axen fra $z = -\frac{p}{2}$ til $z = +\frac{p}{2}$, men i øvrigt strækker sig næsten rørformig i det uendelige, ere Indhyllingskurverne Ellipser. For de Punkter, der ligge indenfor en af de ovennævnte paa Fladen liggende Hyperbler eller ligge tilvenstre for Planen $x = -\frac{p}{4}$, idet den givne Parabel tænkes at ligge tilhøjre for denne, haves Indhyllingskurver, der ere imaginære; for andre Stillinger af P (indenfor to adskilte Rum) faas Indhyllingskurver, der ere Hyperbler.

Vi gaa nu over til Bestemmelsen af det analoge geometriske Sted ved Keglesnit med Centrum, og holde os til Ellipsen, idet Resultaterne ved Hyperblen let udledes paa samme Maade; X-Axen og Y-Axen lægges henad Kurvens Axer. I Ellipsens Plan dannes det geometriske Sted af selve Ellipsen i Forbindelse med det geometriske Sted for Skjæringspunkter af paa hinanden vinkelrette Tangenter til Ellipsen o: Ligningen for den søgte Flades Snit i XY-Planen er

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

I XZ-Planen dannes det geometriske Sted af en Cirkel med Radius a og en Ellipse med Halvaxer $\sqrt{a^2 + b^2}$ og b. I YZ-Planen er Snittet:

$$(y^2 + z^2 - b^2)\left(\frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1\right) = 0.$$

Disse Resultater findes aldeles som de tilsvarende ved Cirklen S. 35—36. Fladen, der er symmetrisk med Hensyn til de tre Koordinatplaner, faar da Ligningen

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - a^2 - b^2} = 1,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Fladen bliver altsaa den velbekjendte Bølgeflade. For at afgjøre, i hvilke af de ved Fladen bestemte Rum et Punkt P maa ligge, for at den tilhørende Indhyllingskurve bliver imaginær, hyperbolsk eller elliptisk, kommer det aabenbart kun an paa at vide, hvorledes det forholder sig med Punkterne af de oven bestemte Snit, thi for Fladens Centrum O bliver Indhyllingskurven en Ellipse, og man kan komme fra O til et vilkaarligt Punkt i Rummet uden at over-

skride Fladen andetsteds end i Punkter af et af Hovedsnittene. Man ser nu, at i XY-Planen vil Ellipsen skille de Punkter, hvis tilhørende Indhyllingskurver ere Ellipser, fra dem, hvis Indhyllingskurver ere Hyperbler. Overskrider P Cirklen i sin Bevægelse udad, bliver Indhyllingskurven imaginær. I XZ-Planen byttes den her angivne Betydning af Cirkel og Ellipse blot om. I XZ-Planen skjære Cirkel og Ellipse hinanden i fire Punkter, der ere Dobbeltpunkter paa Fladen; for hvert af disse Punkter ville specielt de to Punkter, hvori den tilhørende Indhyllingskurve udarter, falde sammen. Som en Følge heraf deles ved disse Punkter saavel Cirkel som Ellipse i fire Dele, saaledes at de to Dele af Ellipsen, der ligge X-Axen fjernest, og de to Dele af Cirklen, der ligge X-Axen nærmest, svare til en i to reelle Punkter udartet Indhyllingskurve, og altsaa danne Overgang mellem Punkter, der svare til elliptiske, og Punkter, der svare til hyperbolske Indhyllingskurver.

Hyperblen behandles paa aldeles lignende Maade (man ændrer i Ligningen b^2 til $-b^2$), hvad vi ikke ville opholde os ved.

Kun for den ligesidede Hyperbel blive Forholdene særlige, idet alle Indhyllingskurverne der ere Parabler. Den behandlede Flade faar der den simplere Ligning:

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2 + a^2) + z^2 (x^2 - y^2) = 0.$$

Alle Punkter P i Rummet (der ikke ligge paa Z-Axen) ville svare til en reel Parabel som Indhyllingskurve, og det er kun dennes Konvexitet, der vil skifte, naar P overskrider den nys nævnte Flade.

Vi ville nu ogsaa løse en anden Opgave, svarende til en tidligere S. 37. Naar fra et Punkt P i Rummet en i et Keglesnit $\varkappa$ indskreven Trekant projiceres ved et retvinklet Hjørne, ville uendelig mange indskrevne Trekanter projiceres ved saadanne. I den Kegle, der fra P projicerer $\varkappa$, findes der nemlig altid cirkulære Snit. Vi ville nu søge den Flade, der er det geometriske Sted for saadanne Punkter P. I Planen existerer der vel egentlig ikke noget søgt Punkt, men derimod vil hvert Punkt uendelig nær ved og lodret over $\varkappa$ være et Punkt af den ønskede Beskaffenhed. Gjennem en Linie OZ, der er vinkelret paa Ellipsens Plan og gaar gjennem dens Centrum, lægges en Plan, som indeholder P og

skjærer Ellipsen i A og A_1. Lægges derpaa gjennem P en Plan vinkelret paa PA, der skjærer AA_1 i Q og Ellipsen i M og N, haves, saafremt $P - AMN$ er et retvinklet Hjørne,

$$PQ^2 = MQ \,.\, QN = \frac{c^2}{a^2} \,.\, AQ \,.\, QA_1,$$

idet $AA_1 = 2a$, og c er Længden af den paa AA_1 vinkelrette Halvdiameter. Naar P_1 er Projektionen af P paa Ellipsens Plan, er endvidere

$$PQ^2 = QP_1 \,.\, QA, \text{ altsaa } QP_1 = \frac{c^2}{a^2} A_1 Q.$$

Nu faar man $A_1 P_1 = A_1 Q + QP_1 = \frac{a^2 + c^2}{c^2} QP_1$,

og altsaa $P_1 P^2 = QP_1 \,.\, P_1 A = \frac{c^2}{a^2 + c^2} \,.\, A_1 P_1 \,.\, P_1 A.$

Det geometriske Sted for de Punkter P, der ligge i en vilkaarlig Plan gjennem OZ, er derfor en Ellipse.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra Trekanter indskrevne i en Ellipse kunne projiceres ved retvinklede Hjørner, er en Ellipsoide.

Dennes Halvaxer ere a, b og $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, naar a, b ere den givne Ellipses Halvaxer. For Hyperblen vil det tilsvarende geometriske Sted blive en Hyperboloide med et eller to Næt, eftersom $a \gtrless b$. Er Hyperblen ligesidet, gaar Hyperboloiden over til en hyperbolsk Cylinder.

For Parablen vil det geometriske Sted være en Omdrejningsparaboloide.

Af ovenstaaende kan man slutte, at den Konstruktionsopgave: i et Keglesnit at indskrive en Trekant med givet Skjæringspunkt P_1 mellem Højderne, i Almindelighed har uendelig mange Opløsninger. Vælges den ene Vinkelspids A vilkaarlig, kan man konstruere den modstaaende Side paa følgende Maade: Gjennem P_1 drages Diametren AA_1 og paa denne bestemmes Punktet Q ved $P_1 Q = \frac{c^2}{a^2} \,.\, QA_1$, idet a og c have samme Betydning som ovenfor; den til A modstaaende Side gaar da gjennem Q vinkelret paa AA_1.

KEGLESNITSLÆREN I OLDTIDEN[1]).

(AF H. G. ZEUTHEN).

(ANMELDT AF H. VALENTINER).

Naar Forfatteren af denne Artikel anmelder det Skrift, hvis Titel Artiklen bærer, maa han først og fremmest advare imod at anse hans Anmeldelse for en Kritik. Anmelderen kjender ikke meget mere til Oldtidens Mathematik, end han har læst sig til ved Studiet af Prof. Z.'s Bog, og de Bemærkninger han maatte gjøre, ere alle foranledigede ved, hvad der findes i selve det anmeldte Skrift.

Anmelderens Hensigt er først og fremmest at henlede deres Opmærksomhed, som endnu ikke have læst ovennævnte Skrift, derpaa og opfordre dem til at læse det. De ville sikkert have Udbytte heraf paa flere Maader. Navnlig vil Anmelderen opfordre yngre Mathematikere til Studiet af Prof. Z.'s Bog, da der hører et rent Minimum af Kundskaber til at læse den, og da de, der lige have lært den moderne Fremstilling af Keglesnitslæren at kjende, ville have stort Udbytte af at gjøre Bekjendtskab med en Keglesnitslære, som den græske, der ligner den moderne saa meget og dog i mange Henseender er saa forskjellig derfra. Tillige vil Studiet af denne Bog give et rent materielt Udbytte ved Indøvelse af Sætninger om Keglesnittene, der enten ere helt nye, eller hvis Vigtighed dog ikke før ere gaaede op for den studerende.

For øvrigt kan Skriftet anbefales enhver Mathematiker som det vistnok betydeligste mathematiske Skrift udenfor Lærebogsliteraturen, der er fremkommet her i Landet. Skriftet udmærker sig ved et meget fyldigt Indhold og en gjennemgaaende klar Fremstilling, ligesom man ved Gjennemlæsningen vil føle sig slaaet af den overlegent dygtige og geniale Maade, hvorpaa de forskjellige Antydninger om Indholdet af tabte Skrifter og om Anvendelsen af givne Sætninger er benyttet. Jeg kan dog ikke tilbageholde den Be-

[1]) Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, math. naturv. Afdeling 6. Række, 3. Bd. I. — En tysk Oversættelse er udkommen paa A. F. Høst & Søns Forlag.

mærkning, at jeg tror Prof. Z. i sin Beundring for, hvad Grækerne bevislig have frembragt, undertiden tillægger dem Kjendskab til noget, de ikke have kjendt, hvilket jeg senere skal søge at paavise.

Prof. Z.'s Bog indeholder en saavidt mulig fuldstændig Oversigt over, hvad man i Oldtiden har kjendt af Keglesnitslæren, da Mathematiken i dette Tidsafsnit havde naaet sin højeste Blomstring. For at kunne gjøre dette, gjengiver Prof. Z. Indholdet af Apollonios' store Værk om Keglesnitslæren, idet han supplerer dette og oplyser Hensigten med Apollonios' Lærebygning med de, som det synes, meget sparsomme Meddelelser, der haves andetsteds fra [1]).

Jeg antager, at der herved omtrent er naaet en saadan Oversigt over Keglesnitslæren i Oldtiden, som der i Fremtiden kunde naas om vort Kjendskab til Geometrien i sin Helhed ved Gjengivelsen af Indholdet af f. Ex. Salmon's geometriske Lærebøger. Prof. Z. begynder med at give en Udvikling af, hvilke algebraiske Hjælpemidler der stod til de Gamles Raadighed ved Udviklingen af deres Keglesnitslære, der var udelukkende analytisk, og som altsaa krævede en paa en eller anden Maade fremsat Algebra. Denne Algebra var, da Fremstillingen af Tal hos Grækerne var af meget ufuldstændig Art, fremstillet under geometrisk Form, og medens man udtrykte alle Sætninger ved Ord, traadte de oplysende Figurer i vort Tegnsystems Sted. Denne Udtryksmaade synes os ved første Øjekast vanskelig og uoverskuelig, tilmed da de Gamle manglede Udtryk for negative Størrelser; men jeg tror, at man maa give Prof. Z. Ret i, at ved en Smule Øvelse er den ikke synderlig vanskeligere end vor, naar det kun gjælder om Regning med Størrelser, der ikke ere af højere end anden Grad (Produkt af 2 Faktorer, 2den Potens).

Undertiden er deres geometriske Maade at udtrykke en Ligning paa, naar man tager Hensyn til den oplysende Figur, endogsaa simplere end vor. Saaledes overraskes man ved den overordentlig simple Maade, hvorpaa et Par paa Figuren tegnede Linier antyder Ligningen for de i Fig. 6 og 7 p. 28 tegnede Keglesnit.

---

[1]) Det maa dog bemærkes, at for enkelte Dele af Keglesnitslæren henholder Prof. Z. sig til Archimedes.

Efter at have givet en Udvikling af Grækernes Algebra (den geometriske Algebra) gaar Prof. Z. derpaa over til at undersøge, hvilken Kundskab til Keglesnitslinierne Grækerne have havt før Apollonios, og dernæst i 3die og 4de Afsnit over til Gjengivelsen af Indholdet af Apollonios 1ste Bog.

Denne Bog har før været betragtet som Bevis paa, at Apollonios' Lærebygning var umethodisk og kun gik ud paa at finde nye Sætninger om Keglesnittene.

Prof. Z. viser imidlertid, at netop denne Bogs Indhold godtgjør det modsatte, idet den indeholder bekjendte Sætninger, af hvilke den kun medtager saa mange, som ere nødvendige for dens Formaal, som er at vise, at et vilkaarligt Snit i en Kegle af 2den Orden altid er et Keglesnit efter Grækernes Opfattelse af dette Ord, nemlig et Snit, som kan anbringes paa en ret cirkulær Kegle. Dette vises paa den Maade, at først Keglesnittets Ligning udledes af dets Beliggenhed paa en vilkaarlig Kegle af 2den Orden, derpaa udledes forskjellige Sætninger om Ændringer af Keglesnittets Ligning, og endelig benyttes disse til at vise, at man gjennem hvert saadant Keglesnit kan lægge en ret cirkulær Kegle.

I det hele synes man efter Prof. Z.'s Bog snarere at maatte faa den Opfattelse af Apollonios, at han har været en stor Samler og Ordner af det forud givne end en egentlig stor Opdager, og at hans største Fortjeneste er at have samlet alt, hvad man paa hans Tid kjendte om Keglesnittene, til en sluttet Lærebygning.

Imidlertid maa man dog tillægge ham et stort Fremskridt fremfor sine Forgængere, nemlig at i hans Skrifter optræder for første Gang Betragtningen af begge Hyperbelgrene sammen som et Keglesnit. Denne Betragtning viser sig ved, at han, uagtet han altid betegner hver Gren af Hyperblen for sig som et Keglesnit, udvider alle de kjendte Sætninger til ogsaa at gjælde, naar der i Stedet for et sluttet Keglesnit optræder 2 sammenhørende Hyperbelgrene.

Apollonios' første Bog er hos Prof. Z. meget udførlig behandlet og Prof. Z.'s Fremstilling giver strax et slaaende Indtryk baade af Fortrinene og Manglerne hos Grækerne.

Manglerne ere da væsentlig en trættende Bredde, fremkommen dels ved, at enhver Sætning i den moderne Fremstilling gjerne hos Grækerne maa udstykkes i flere for at udfylde Manglen paa Fortegn, dels ved Grækernes noget overdrevne Fordring paa Nøjagtighed, og desuden at Beviserne ere givne under en vanskelig Form. Vanskeligheden ved denne Form bestaar væsentlig deri, at Beviset meddeles paa en saadan Maade, at den, der læser det, vil have stor Møje med at se, ved hvilke Ideassociationer Bevisets Forfatter er ført til Sætningen og Beviset.

Fortrinene vise sig i den Behændighed, hvormed der opereres, saaledes at enhver Sætning altid udtrykkes paa den simpleste og anskueligste Maade.

Som særlig smuk og simpel skal nævnes den Maade, hvorpaa Apollonios (i øvrigt ligesom hans Forgængere) udleder Keglesnittets Ligning af dets Definition som Snit paa en 2den Grads Kegle, og den Side 68 anførte saakaldte Apolloniske Arealsætning, der giver et simpelt Udtryk for et Keglesnit henført til 2 vilkaarlige Koordinataxer, gaaende gjennem Keglesnittets Centrum [1]).

Efter Redegjørelsen for 1ste Bog, behandles i 5te Afsnit 2den Bog, hvis Indhold synes at være mindre betydeligt. Der udvikles i denne Bog en Del Sætninger om Tangenter og Asymptoter.

Herfra gaar saa Prof. Z. over til at behandle 3die Bog, der indeholder en Del af de interessanteste Sætninger i Apollonios' Keglesnitslære, ligesom Prof. Z.'s Gjengivelse af Indholdet af denne Bog og hans Gjætning om, hvilken Anvendelse Apollonios har tænkt sig, der kunde gjøres af Theoremerne i den, hører til de interessanteste Partier i Prof. Z.'s Bog.

3die Bog indeholder Fuldstændiggjørelsen af Arealsætningen, Newtons Sætning, der af Prof. Z. med bedre Ret kaldes Potenssætningen [2]), Sætninger om Pol og Polar, nogle Sætninger, som

---

[1]) Denne Sætning bevises dog først fuldstændig i 3die Bog.

[2]) Den siger, at naar 2 Korder i et Keglesnit skjære hinanden, ville de dele hinanden saaledes, at Forholdet mellem Produktet af Stykkerne af den ene Korde til Produktet af Stykkerne af den anden kun afhænger af Kordernes Retning.

angive Keglesnittenes Tangentfrembringelse, Læren om Brændpunkter, samt endelig nogle Sætninger, der angive Keglesnittene som geometriske Steder for Skjæringspunkterne mellem til hinanden svarende Straaler af 2 projektive Bundter[1]).

Som man ser, er Bogens Indhold overordenlig stort; men Interessen ved Bogen forøges end ydermere derved, at Apollonios i Fortalen siger, at Theoremerne i denne Bog ere nyttige til Bestemmelsen og Diorismen af solide Steder (ɔ: geometriske Steder, der vise sig at være Keglesnit), og blandt disse Steder nævner Stedet til 3 og 4 Linier. Gjengivelsen af denne Bog og de til den knyttede Bemærkninger optage da ogsaa 6te, 7de, 8de, 15de og 16de Afsnit hos Prof. Z, og jeg skal ligeledes omtale den lidt udførligere.

»Stedet til 4 Linier« er det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande x, y, z, u fra 4 givne Linier opfylde Betingelsen

$$\frac{xz}{yu} = \text{Konstant},$$

og at bestemme dette Sted synes at have beskjæftiget hele Oldtiden, indtil Apollonios fuldstændig løste denne Opgave[2]).

Hvorledes dette er sket, angiver Apollonios ikke i sine efterladte Skrifter, men kun, at hans Forgængere have løst Opgaven ufuldstændig, han fuldstændig.

Det er da rimeligt at antage, at Ufuldstændigheden af hans Forgængeres Løsning har bestaaet deri, at de ikke have bestemt Stedet, der som bekjendt bliver et Keglesnit, naar dette blev en Hyperbel, hvis ene Gren ikke gik gjennem alle Vinkelspidserne af den af de 4 Linier dannede Firkant. Dette antages da ogsaa af Prof. Z.

Den Maade hvorpaa Prof. Z. antager, at Grækerne have løst Opgaven, er følgende. Først bevises Sætningen, at naar en Firkant

---

[1]) Det vil sige, vi ville opfatte Sætningerne saaledes; om Grækerne nogensinde have tænkt sig Keglesnittene fremkomne som Tangentfrembringelser eller ved projektive Bundter, er vel ikke fuldstændig afgjort.

[2]) Stedet til 3 Linier er det specielle Tilfælde af Stedet til 4 Linier, hvor 2 af disse Linier falde sammen.

er indskreven i et Keglesnit, er Forholdet mellem Produktet af Afstandene fra et Punkt paa Keglesnittet til de modstaaende Sider af den indskrevne Firkant konstant, og derpaa, at naar en Kurve har denne Egenskab, maa den falde sammen med et paa en forud bekjendt Maade konstrueret Keglesnit.

Den omtalte Sætning om den indskrevne Firkant bevises dog heller ikke strax almindelig; men man antager først, at den indskrevne Firkant er et Trapez, i saa Tilfælde er nemlig Sætningen kun en let Omskrivning af Potenssætningen, og derpaa vises, at naar Sætningen gjælder om et Trapez, gjælder den ogsaa om en vilkaarlig indskreven Firkant.

Ere *ABCD* Vinkelspidserne i det indskrevne Trapez, *E* og *F* vilkaarlige Punkter af Keglesnittet, kan Sætningen om den indskrevne Firkant ved den moderne Udtryksmaade fremsættes paa den Maade, at den siger, at det anharmoniske Forhold

$$A\,(BDEF) = C\,(BDEF),$$

hvad der let ses af Keglesnittets Ligning. For at bevise Sætningen i sin Almindelighed er det da tilstrækkeligt at vise, at af de anførte anharmoniske Forholds Ligestorhed følger

$$A\,(BEDF) = C\,(BEDF),$$

idet dette vilde sige, at naar Sætningen gjaldt om Trapezet *ABCD*, gjaldt den ogsaa om den vilkaarlige Firkant *ABCE*. Idet nu Prof. Z. antager, at Apollonius har ført Beviset omtrent paa den omtalte Maade, føres han herved til at undersøge, hvorvidt Grækerne have vidst Besked om projektive Bundter, og han kommer til den Slutning, at Grækerne fuldstændig have kjendt Frembringelsen af Keglesnit ved projektive Bundter paa det sammenfattende Begreb Projektivitet nær (p. 110).

Til dette Resultat, hvorved jeg dog tror, der tillægges Grækerne for meget, føres Prof. Z. ved at sammenholde Læren om Stedet til 4 Linier med Euklids Porismer, samt med Sætningerne 54—56 i Apollonios' 3die Bog, der indeholder ét andet Udtryk for Frembringelsen af Keglesnit ved projektive Bundter. Euklids Porismer, hvis Indhold som bekjendt er søgt gjenfremstillet af Chasles, have uden Tvivl gaaet ud paa, at Punkter ligge i en ret Linie, at

Linier gaa gjennem samme Punkt, og at Punktrækker paa rette Linier staa i projektive Relationer til hinanden (p. 109).

Indholdet har da for en stor Del været af lignende Art som Chasles' géométrie supérieure. Chasles mener nu om Porismerne, at de ere fremkomne for at træde i Stedet for de forskjellige Ligningsformer i vor analytiske Geometri, idet han siger, at Formaalet med dem er:

»Naar et geometrisk Sted er givet derved, at man paa en given Maade kan konstruere dets Punkter, eller i et givet Koordinatsystem, da at finde en anden Konstruktion af dets Punkter, eller at overføre det i et andet Koordinatsystem, der lader os erkjende dets Natur og Stilling.« (Aperçu historique p. 276).

Heri er Prof. Z. enig med Chasles; men medens Chasles mener, at Porismerne, der hos Euklid kun anvendes paa rette Linier og Cirkler, havde deres Maal i sig selv, idet de gave en analytisk Geometri for disse Linier, mener Prof. Z., at de maa betragtes som Tillæg til eller Indledning til Keglesnitslæren.

I saa Henseende gjør han opmærksom paa, at det kun har været Chasles muligt at gjenfremstille Porismerne, fordi han stadig saa hen til den almindelige Keglesnitslære og enten kun specialicerede den, saa at en Cirkel eller ret Linie traadte i Stedet for et Keglesnit, eller gav en Forbindelse mellem rette Linier, der oprindelig var set ved, at disse rette Linier vare knyttede til et Keglesnit.

Tillige sammenligner han Euklids Porismer med Chasles' géométrie supérieure og gjør opmærksom paa, at i denne Bog, der kun handler om rette Linier og Cirkler, Læren om Homografi og Projektivitet ikke er udviklet for at anvendes paa disse Linier, men væsentlig kun er anvendt paa disse Linier for at give et overskueligt Exempel paa Anvendelsen af denne Lære.

Endelig mener Prof. Z., at selve Navnet »Porismer« kun betyder »Følgesætninger« eller Tilgiftsætninger[1]), og at Euklid ved

[1]) Denne Betydning har Ordet πόρισμα udenfor Titlen paa Euklids Skrift, hvor det ellers bruges af Euklid, Archimedes eller Apollonios.

Titlen paa sit Skrift har villet betegne, at de i dette Skrift fremkomne Sætninger vare Porismer til Keglesnitslæren, idet de tillige supplerede den ved at angive, hvornaar Steder, der sædvanlig vare Keglesnit, i specielle Tilfælde vare Cirkler eller rette Linier, altsaa ikke Keglesnit efter græsk Opfattelse.

Af alt dette slutter Prof. Z. nu, at de Theorier, som have været anvendte i Porismerne paa rette Linier og Cirkler, i andre Skrifter maa have været anvendte paa Keglesnittene. Heri maa man vist give Prof. Z. Ret, og det forekommer mig saaledes bevist, at Grækerne have kjendt meget af Læren om Projektivitet og dens Anvendelse paa Keglesnittene.

Naar jeg før tog et Forbehold om Prof. Z.'s Ret til at sige, at de gamle, paa det sammenfattende Navn Projektivitet nær, havde kjendt Læren om Frembringelsen af Keglesnit ved projektive Bundter fuldstændig, saa er det netop Ordet »fuldstændig« jeg tog Sigte paa. Det forekommer mig, at havde de kjendt den fuldstændig, vilde de ikke have kunnet undgaa at gaa et Skridt videre og betragte Punktrækker paa Keglesnittene, og da er det næsten ikke muligt, at de ikke skulde have kjendt Pascals Theorem, som Prof. Z. selv siger, de ikke kjendte. Desuden dette, at de mangle det sammenfattende Ord for denne Slags Frembringelser, synes mig at vise hen til det samme.

I Forbindelse med hvad Prof. Z. siger om Stedet til 3 og 4 Linier, skal jeg omtale Indholdet af 15de og 16de Afsnit, idet disse ogsaa udvikle Indholdet af eller staa i Forbindelse med Apollonios' 3die Bog.

15de Afsnit handler om, hvorvidt Grækerne have betragtet et Keglesnit som Indhyllingskurve for sine Tangenter.

Der findes i 3die Bog en lille Sætningsgruppe (41—43), der angiver Egenskaber ved Tangenterne uafhængige af Tangenternes Røringspunkter. (En af dem er f. Ex. den, at Produktet af de Stykker en Tangent til en Hyperbel afskjærer af Asymptoterne, regnede fra deres Skjæringspunkt, er konstant).

Prof. Z. mener, at disse Sætninger ere anførte for at give det simpleste Grundlag for en Lære om Tangentfrembringelsen af

Keglesnittene. At Grækerne have været nogenlunde fortrolige med Tangentfrembringelsen af Keglesnittene, udleder han dels af disse Sætninger selv, dels ved at sætte dem i Forbindelse med to Smaaskrifter af Apollonios om »Arealsnittet« og »Forholdssnittet«. Ved at anvende de i disse Smaaskrifter udviklede Theorier i Forbindelse med de nævnte Sætninger, bliver man nemlig virkelig i Stand til at konstruere Tangenterne til et Keglesnit fra et vilkaarligt Punkt, naar Keglesnittet er givet som Indhyllingskurve for rette Linier, der forbinde til hinanden svarende Punkter i to projektive Rækker. Prof. Z. mener herved at have godtgjort, at der er nogen Rimelighed for, at Grækerne kjendte Tangentfrembringelsen af Keglesnit ved projektive Punktrækker under forskjellige Former, dog uden at sammenfatte dem i det fælles Begreb Projektivitet (p. 231). Det vilde være interessant, om der kunde findes fyldestgjørende Beviser for Prof. Z.'s Mening, der, som det synes mig, trænger til yderligere Bekræftigelse.

Lige saa interessant som 15. Afsnit, skjønt paa en anden Maade, er 16. Afsnit, der handler om Brændpunktegenskaberne.

Den Maade, hvorpaa Apollonios udleder disse, er højst ejendommelig, idet han gaar ud fra den Sætningsgruppe, jeg nylig har omtalt, der indeholdt Keglesnittenes Tangentfrembringelse. Hans hele Fremgangsmaade er saa simpel og elegant som vel mulig; men foruden Sindrigheden ved Apollonios' Fremgangsmaade, vil man lægge Mærke til den Korthed, hvormed han omtaler Brændpunktegenskaberne, en Korthed, der er saa stor, at han ikke engang omtaler Parablens Brændpunkt. Ligeledes omtaler han heller ikke Ledelinierne.

Man kunde nu tro, det var, fordi han ikke vidste Besked herom; men Prof. Z. viser, at dette ingenlunde er Tilfældet, idet baade Euklid vidste Besked herom, og Apollonios selv har skrevet en Bog om Brændspeile, hvad det næsten er utroligt, han skulde have gjort uden at vide Besked om Brændpunkterne i Parablen. Grunden til Apollonios' Kortfattethed maa altsaa være den, at han ikke anser Brændpunktegenskaberne for at have stor Betydning i

en almindelig Keglesnitslære, men henviser den videre Udvikling af dem til Specialskrifter.

Jeg har her i Sammenhæng efter Prof. Z. gjengivet det væsentligste af Apollonios' 3die Bog og de dermed sammenhørende Theorier og gaar nu over til at omtale 9de Afsnit, der handler om, hvad Grækerne have vidst om Konstruktionen af Keglesnit gjennem 5 Punkter samt om det Antal Skjæringspunkter, 2 Keglesnit kunne have, samt gjengiver det væsentlige Indhold af Apollonios' 4de Bog samt et dermed sammenhørende Skrift »om det bestemte Snit« (sectio determinata). Apollonios viser i 4de Bog, at 2 Keglesnit højst kunne skjære hinanden i 4 Punkter. Konstruktionen af et Keglesnit gjennem 5 Punkter medtager han derimod ikke, uagtet denne Opgave reelt er løst ved Kjendskaben til Keglesnittene som »Sted til 4 Linier«.

Grunden hertil maa efter Prof. Z. søges i de formelle Vanskeligheder, det vilde have for en Græker at fremstille Løsningen af denne Opgave. Han maatte nemlig paa Forhaand opgive, hvilken Slags Keglesnit der mentes (Ellipse, Parabel eller Hyperbel), og om det overhovedet var muligt at lægge et Keglesnit gjennem de givne 5 Punkter, d. v. s. om dette ikke opløste sig i 2 Hyperbelgrene, hvoraf den ene indeholdt nogle, den anden de øvrige Punkter.

At man reelt har løst Opgaven paaviser Prof. Z. ved at meddele en Løsning af Pappos paa den Opgave gjennem 5 Punkter at lægge en Ellipse, idet man paa Forhaand ved, at der gjennem disse 5 Punkter kan lægges en Ellipse.

I Forbindelse med Indholdet af 4de Bog af Apollonios, meddeles Indholdet af et Skrift af samme Forfatter »det bestemte Snit«, idet Indholdet af dette Skrift formodentlig har været anvendt til Løsningen af den Opgave, at bestemme Skjæringen mellem en vilkaarlig ret Linie og et Keglesnit bestemt ved 5 Punkter. Efter at være naaet saa vidt i Gjengivelsen af Apollonios' Skrift, forlader Prof. Z. i de næste Afsnit Apollonios' Keglesnitslære for at give en samlet Oversigt over Læren om solide Steder.

I 10de Afsnit undersøges da først, hvilke Midler Grækerne havde til at undersøge Beskaffenheden af et forelagt geometrisk

Steds Beskaffenhed, og det vises da, at disse, ligesom hos os, have bestaaet i at henføre Stedet til et Koordinatsystem og at finde Stedets Ligning, og at de altid have haft Midler til at bestemme Stedet, naar dets Ligning ikke var af højere end 2den Grad.

11te, 12te og 13de Afsnit handle om, hvilke Opgaver, »de saakaldte solide Opgaver«, der løstes ved disse solide Steder.

Der fremkommer her en interessant Formodning, nemlig, at det er »solide Steder«, der have faaet Navn af »solide Opgaver« og ikke omvendt. Man vilde jo være meget tilbøjelig til at tro, at Keglesnittene kaldtes solide Steder, fordi de oprindelig frembragtes som Snit i Kegler, altsaa frembragtes ved Legemer, og at saa Navnet »solide« overførtes paa de Opgaver, der løstes ved disse Linier. Prof. Z. paaviser imidlertid, at det har Sandsynligheden for sig, at man oprindelig kaldte saadanne Opgaver solide, som løstes ved 3die Grads Ligninger, fordi man søgte at udtrykke disse Ligninger ved Anlæget af rumlige Former (Parallelepipeder), paa lignende Maade, som man udtrykte 2den Grads Ligninger ved Fladeanlæg. Først, da det viste sig, at disse Opgaver langt lettere kunde sættes i Ligning og løses ved Hjælp af Keglesnit end ved Former i Rummet, gik Navnet solide Opgaver over paa alle Opgaver, der løstes ved Keglesnit, og den oprindelige Betydning af »solide Opgaver« glemtes lidt efter lidt.

Blandt dem, der have behandlet saadanne 3die Grads Ligninger, kan nævnes Archimedes, der endogsaa synes systematisk at have undersøgt Løsningen af saadanne Ligninger.

Den oprindelige Løsning af solide Opgaver er da ofte heller ikke sket ved Keglesnit, men udført ved simple mekaniske Hjælpemidler, navnlig ved den saakaldte Indskydning, d. v. s. ved at lægge en ret Linie igjennem et Punkt, saaledes at der paa denne mellem 2 givne Kurver afskjæres et Stykke af given Længde. Dette lader sig jo let gjøre rent mekanisk, og Løsningen af en solid Opgave (f. Ex. Vinklens Tredeling) lader sig ofte meget lettere udføre paa denne Maade end ved Keglesnit. Man har da først senere foretaget Løsningen af Opgaven ved Keglesnit, navnlig for

at kunne gjennemføre den saakaldte Diorisme[1]), og saa til Slutningen har man indført den systematiske Fordring, at alle Opgaver, der kunde løses ved Keglesnit, ogsaa skulde løses ved Keglesnit.

Som Exempel paa Behandlingen af solide Opgaver gjengiver Prof. Z. Apollonios' Løsning af den Opgave: »At konstruere Normalerne til et givet Keglesnit fra et vilkaarligt Punkt«. Apollonios' Behandling af denne Opgave er overordentlig smuk, og den dertil knyttede Diorisme fører indirekte til en Bestemmelse af et Keglesnits Evolut.

Prof. Z. bemærker om denne Løsning, at næsten alle Forfattere der have skrevet om græsk Mathematik, have været enige om at betragte Behandlingen af denne som det skjønneste opbevarede Exempel paa, hvor højt den græske Mathematik kunde naa. Denne Beundring mener han ogsaa er grundet, kun, at man ikke maa betragte Behandlingen af den omtalte Opgave som noget enestaaende eller afvigende fra den øvrige græske Mathematik, men derimod netop som et Exempel paa den græske Mathematiks Behandling af solide Opgaver.

Der er heri noget slaaende, og man kommer herved end yderligere til at beundre en mathematisk Lærebygning, hvis enkelte Led vare saadanne Theorier som Apollonios' Theori om Normalerne.

Min Anmeldelse er allerede bleven temmelig lang, idet jeg, for at give et Begreb om Prof. Z.'s Bog, har gjengivet en Del af det væsentligste Indhold. Idet jeg tror ved det allerede meddelte at have skitseret den græske Keglesnitslære og Prof. Z.'s Behandling deraf, skal jeg derfor slutte, uagtet der endnu kunde være mange Ting i Prof. Z.'s Bog, som det kunde have sin Interesse at nævne.

Et Afsnit kan jeg dog ikke undlade endnu at omtale. Det er det 20de Afsnit, som indeholder »Archimedes' Bestemmelser af Arealer, Rumfang og Tyngdepunkter«.

---

[1]) Diorisme, Afgrænsning, hvor naar en Opgave er mulig, hvor naar ikke, hvor mange Løsninger den kan have. En saadan hørte altid med til den fuldstændige Løsning af en Opgave, og Grækerne fordrede, mærkelig nok, at den skulde staa foran Opgaven.

Dette Afsnit, der kan læses og forstaas uden Gjennemlæsning af det øvrige Værk, indeholder sikkert nogle af de genialeste mathematiske Theorier, der nogensinde ere fremsatte, navnlig skal jeg fremhæve Archimedes' Beregning af Parabelsegmenter og deres Tyngdepunkter.

Endelig vil jeg endnu af Prof. Z.'s Værk fremhæve den overordentlig interessante Sammenligning, der lige paa de sidste Sider findes mellem moderne og antik Geometri, hvad vi have lært af Grækerne, og hvad vi have forud for dem.

Det er vistnok overordentlig faa iblandt os, der have Lejlighed til direkte at gjøre sig bekjendt med den antike Geometri; men vi kunne takke Prof. Z. for, at vi nu ved hans Værk med forholdsvis Lethed kunne sætte os ind i ialtfald en af de vigtigste Grene af den antike Mathematik, og for de allerfleste vil det vel give et langt bedre Begreb om den antike Mathematik at læse hans Værk end at arbejde sig igjennem et eller andet antikt Originalværk.

EXAMENSOPGAVER.

Polyteknisk Examen. Januar 1886.

For Mekanikere og Ingeniører.

1. Integrer Differentialligningen

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - ax \frac{dy}{dx} + \frac{2a+1}{4} y = 0 \text{ (} a \text{ positiv hel).}$$

Integralet gives rational Form, og Konstanterne bestemmes saaledes, at $x = 1$ giver $y = 0$ og $\frac{dy}{dx} = 0$.

2. Igjennem et Punkt O trækkes tre paa hverandre vinkelrette Korder, AA_1, BB_1, CC_1, i en Ellipsoide. Bevis, at

$$\frac{1}{OA.OA_1} + \frac{1}{OB.OB_1} + \frac{1}{OC.OC_1},$$

hvor Stykkerne ere regnede med Fortegn, er konstant, og find det

geometriske Sted for O, naar den konstante Værdi er k. Vis, at en Betingelse for, at $\overline{OA}^2$ (O givet) er Maximum eller Minimum, er, at O ligger paa Normalen til A, og angiv den Betingelse, der yderligere maa være opfyldt, for at $\overline{OA}^2$ virkelig skal være Maximum eller Minimum.

3. At udvikle Arealprincipet for et System af Legemer, der ikke paavirkes af ydre Kræfter.

En homogen Omdrejningscylinder er sammensat af uendelig tynde koncentriske Skaller, der ikke ere forbundne, men passe nøje i hinanden. Den yderste roterer om den fælles Axe med Vinkelhastigheden ω; de andre rotere samme Vej, alle Vinkelhastighederne ere proportionale med fjerde Potens af Afstanden fra Axen. Pludselig forbindes hele Systemet af Skaller og bliver til en fast Cylinder; med hvilken Vinkelhastighed fortsætter denne Bevægelsen? Hvorledes forholder det sig med den levende Kraft før og efter Forbindelsen?

For Kemikere.

En Cirkel med Radius a har sit Centrum i Axen med Abscissen b ($b > a$). Find det geometriske Sted for Fodpunkterne af vinkelrette Linier fra Begyndelsespunktet paa Cirklens Tangenter. Hvorledes bliver Ligningen for Stedet i polære Koordinater, naar der til hver Værdi af θ imellem 0 og 2π kun skal svare et Punkt af Kurven? Hvor stort er det imellem den yderste og inderste Omkreds liggende Areal?

IV. Klasses Hovedexamen og alm. Forberedelsesexamen. Marts 1886.

Arithmetik.

1. En Kjøbmand har kjøbt et Parti Varer, som have foraarsaget ham Omkostninger, der udgjøre $1\frac{1}{6}$ pro Cent af Indkjøbsprisen, og derefter sælger han dem for 2600 Kr. med en Fortjeneste af $14\frac{2}{7}$ pro Cent af det samlede Beløb af Indkjøbspris og Omkostninger. Hvad have de kostet?

2. Bevis Reglerne for Multiplikation og Division af Rodstørrelser og anvend dem til at finde

$$x = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[7]{a^6}}$$

under den simpleste Form, samt beregn x, naar $a = 10000000$.

3. Find x af $7^{x+2} - 5 \cdot 7^x = 105644$,

y af $7^{2y} - 5 \cdot 7^y = 2156$.

Opl. 1. $x \cdot \frac{91}{90} \cdot \frac{8}{7} = 2600$ giver $x = 2250$.

2. $x = \sqrt[420]{a^{-59}}$, $log\, x = -\frac{59 \cdot 7}{420} = 0{,}01667 - 1$,

$$x = 0{,}103912.$$

3. $7^x = \frac{105644}{7^2 - 5}$, $x = 4$.

$$7^y = \frac{5 \pm 93}{2} = \begin{cases} 49 \\ -44 \end{cases} \qquad y = 2.$$

Geometri.

1. To Vinkler i en Trekant ere halverede, og igjennem Halveringsliniernes Skjæringspunkt er trukket en Transversal, parallel med den Side, hvorved Vinklerne ligge. Bevis, at denne Transversal er lig Summen af de to Stykker af de andre Sider, som ligge imellem Transversalen og den først nævnte Side.

2. Konstruer en retvinklet Trekant, naar dens omskrevne Cirkels Radius er givet, og Katheternes Projektioner paa Hypotenusen forholde sig som 3 til 2.

3. Arealet af en ligebenet Trekant er $4\sqrt{3}$, Radius i den indskrevne Cirkel $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ og Radius i den udvendige Berøringscirkel ved Grundlinien $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Find Siderne.

Opl. 1. Der dannes ligebenede Trekanter ved Halveringslinierne og Transversalen, hvoraf Sætningen følger.

2. Den givne Cirkels Diameter deles i det givne Forhold; en vinkelret Linie derpaa i Delingspunktet skjærer den ene Halvcirkelperiferi i den rette Vinkels Toppunkt.

3. Med de sædvanlige Betegnelser faas $a = 2\sqrt{rr_a} = 2$,

$$\frac{r_a}{r} = \frac{s}{s-a} = \frac{4}{3},$$ hvoraf $s = 8$, altsaa $b = c = 7$.

Opgaven er altsaa løst uden Hjælp af Trekantens Areal, der følgelig maa stemme med det fundne; da $4\sqrt{3} = rs = 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = r_a(s-a) = 6 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$, finder dette Sted.

Praktisk Regning.

1. En Meter Klæde kjøbes i Frankrig for 21,05 Francs og skal sælges i Danmark med 14 pro Cent Fortjeneste. Hvor meget maa da gives i Kroner og Øre for en dansk Alen?

Under Salget beskadiges en Del, saa at Resten maa sælges til en lavere Pris, hvorved Gjennemsnitsprisen for det hele bliver 24 Øre mindre for hver Alen. Hvor mange pro Cent vil der saa tjenes?

1 Meter = 3,18 danske Fod. 100 Francs = 70,5 Kr.

2. Paa en Egetræs Cylinder, hvis Højde er 6 Linier, og hvis Grundflades Radius er 4 Tommer, fæstes en Blyplade med samme Grundflade. Naar en Kubikfod Vand vejer 61,821 Pd., 1 Kubikfod Egetræ 0,850 og en Kubikfod Bly 11,389 Gange saa meget som en Kubikfod Vand, hvor mange Linier maa da Blycylinderens Højde være, for at denne Forbindelse af Eg og Bly skal have samme Vægt som en Vandmasse af samme Størrelse? Vis, at Spørgsmaalet kan besvares, selv om nogle af de opgivne Tal ikke vare givne.

Cylinderens Kubikindhold $= \pi r^2 h$ Kubikfod, naar Grundfladens Radius r og Højden h ere givne i Fod. Der anvendes Duodecimalmaal.

Opl. 1. 1 Meter = 1,59 Alen koster 21,05 Fr. = 21,05 . 0,705 Kr., altsaa

$$1 \text{ Alen koster } \frac{21{,}05 \cdot 0{,}705}{1{,}59} \cdot 1{,}14 = 10 \text{ Kr. } 64 \text{ Øre.}$$

Derefter skal

$$10{,}40 = 9\tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{p}{100}\right), \text{ hvoraf } p = 100\left(\frac{3 \cdot 10{,}40}{28} - 1\right) = 11{,}4.$$

2. Blypladens Højde i Fod være x, saa er

$$61{,}821 \,.\, \pi \,.\, \frac{1}{9}\left(\frac{1}{24} + x\right) = 61{,}821 \,.\, \pi \,.\, \frac{1}{9}\left(\frac{1}{24} \,.\, 0{,}850 + 11{,}389x\right).$$

De heri bortgaaende Faktorer $61{,}821 \,.\, \pi \,.\, \frac{1}{9}$ behøve aabenbart ikke at være kjendte, naar x søges. Man faar

$$x = \frac{0{,}15}{24 \,.\, 10{,}389} \text{ Fod} = \frac{0{,}15 \,.\, 144}{24 \,.\, 10{,}389} \text{ Linier} = \frac{0{,}9}{10{,}389} \text{ Lin.},$$

som ved Logarithmer giver

$$x = 0{,}08663^{\text{III}} = \text{lidt over 1 Skrupel ɔ: } 1{,}03956^{\text{IV}}.$$

Almindelig Forberedelsesexamen. Juni 1886.

Praktisk Regning.

1. En Kapital paa 36000 Kr. staar paa Rente og Rentes Rente, det første Aar til 4 pro Cent og i hvert følgende Aar til ½ pro Cent mere end det foregaaende indtil Slutningen af fjerde Aar. En anden Kapital paa 54000 Kr. staar i et Handelsforetagende, hvor der i det første Aar vindes 8 pro Cent, det andet 6½, det tredie 10¼ pro Cent, hvilket Udbytte lægges til Kapitalen. Hvor mange pro Cent vindes eller tabes paa den sidste Kapital i det fjerde Aar, naar Forholdet imellem de to Kapitaler ved Slutningen af det fjerde Aar er det omvendte af det, det var fra Begyndelsen af?

2. I M's Testamente er bestemt, at hans Efterladenskaber skulle deles imellem A, B og C saaledes, at A faar dobbelt saa meget som B, og denne dobbelt saa meget som C. M's Ejendomme ere:

1) en Gaard paa Landet, vurderet til 180000 Kr., men hvis virkelige Værdi kun er 85 pro Cent heraf;

2) En Vandmølle, hvis Værdi forholder sig til Gaardens som 4 til 9;

3) en Skov, der aarlig indbringer 7200 Kr. (regnet som Rente af en Kapital, der giver 4½ pro Cent).

Naar A overtager Gaarden, B Møllen, C Skoven, hvor meget maa da afgives til de andre af den, som faar mere, end Testamentet bestemmer?

Opl. 1. Kaldes r Rentefoden for, hvad den anden Kapital indbringer i det fjerde Aar, saa er

$$\frac{36000 \,.\, 1{,}04 \,.\, 1{,}045 \,.\, 1{,}05 \,.\, 1{,}055}{54000 \,.\, 1{,}08 \,.\, 1{,}065 \,.\, 1{,}1025\,(1 + r)} = \frac{3}{2},$$

følgelig $$1 + r = \frac{4 \,.\, 1{,}04 \,.\, 1{,}045 \,.\, 1{,}05 \,.\, 1{,}055}{9 \,.\, 1{,}08 \,.\, 1{,}065 \,.\, 1{,}1025},$$

hvoraf $$\log(1 + r) = 0{,}62526 - 1,\quad 1 + r = 0{,}42195,$$

altsaa $$r = -\, 0{,}57805.$$

Der er tabt 57,805 pro Cent.

2. Gaardens Værdi = 153000 Kr. (A's Part)
Vandmøllens — = 68000 — (B's —)
Skovens — = 160000 — (C's —)

Tilsammen = 381000 Kr.

$\frac{1}{7}$ heraf tilkommer C, nemlig 54428 Kr. $57\frac{1}{7}$ Øre,
$\frac{2}{7}$ — — B, — 108857 — $14\frac{2}{7}$ —
$\frac{4}{7}$ — — A, — 217714 — $28\frac{4}{7}$ —

Altsaa C skal afstaa 105571 Kr. $42\frac{6}{7}$ Øre,
hvoraf A faar 64714 — $28\frac{4}{7}$ —
— B — 40857 — $14\frac{2}{7}$ —

Alm. Forberedelsesexamen og fjerde Klasses Hovedexamen.

Arithmetik.

1. A kjøber i England 125 Yards Klæde à $9\frac{1}{5}$ sh. Ved Salget beregner han sig 25 pro Cent Fordel. I Stedet for Penge modtager han af B 1075 Flasker Vin, som denne har indkjøbt i Frankrig for 1 fr. 20 cent. Flasken. Hvor mange pro Cents Fordel har B beregnet sig? $\frac{1 \text{ sh.}}{1 \text{ fr.}} = \frac{5}{4}$.

2. I Ligningen

$$\log(3x + 5)^2 + \log(2x - 5)^2 = 4,$$

betyder *log* Logarithmer i Briggs' System. Find x og prøv Rigtigheden af de fundne reelle Rødder.

3. Efter at Nævneren i Brøken i følgende Udtryk

$$\sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{3x^2 - 15x + 18}}$$

er opløst i Faktorer, skrives det under den simplest mulige Form samt beregnes uden Logarithmer med en Nøjagtighed af $\frac{1}{81}$ for $x = 8$.

Opl. 1. Det søgte Antal pro Cent betegnes ved x, man har da

$$125 \cdot 9\tfrac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1075 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{100+x}{100},$$

hvoraf $$100 + x = 139\tfrac{151}{516},\ x = 39{,}29.$$

2. Den forelagte Ligning kan ændres enten til

$$(3x+5)^2\,(2x-5)^2 = 10000,$$

hvoraf $$(3x+5)(2x-5) = \pm 100,$$

eller først til $$\log(3x+5) + \log(2x-5) = 2,$$

hvoraf $$(3x+5)(2x-5) = 100.$$

I sidste Tilfælde fremkommer der ingen imaginære Værdier for x, men kun

$$x = 5 \text{ og } x = -\frac{25}{6}.$$

Prøven viser, at for $x = 5$ er

$$\log 20^2 + \log 5^2 = \log 100^2 = 4,$$

og for $x = -\frac{25}{6}$ bliver

$$\log\left(-\frac{15}{2}\right)^2 + \log\left(-\frac{40}{3}\right)^2 = \log\left(\frac{15 \cdot 40}{6}\right)^2 = \log 100^2 = 4,$$

saa at begge Løsninger tilfredsstille Opgaven.

3. Da $3x^2 - 15x + 18 = 3(x-3)(x-2)$, maa enten $x - 3$ eller $x - 2$ gaa op i Tælleren, hvis Forkortning er mulig. Ved Forkortning med $x - 3$ faas følgende Resultat

$$\sqrt{\frac{x+2}{3}},$$

som for $x = 8$ bliver til

$$\frac{\sqrt{21870}}{81}, \text{ som ligger imellem } \frac{147}{81} \text{ og } \frac{148}{81}\text{ [1]}.$$

[1]) Ved en fejl Afskrift af Opgaven blev Forkortningen ikke mulig og Talregningen mere sammensat end paatænkt. Opgaven har dog tjent til at vise, hvorvidt vedkommende forstod at behandle saadanne Spørgsmaal, men den har krævet en mildere Bedømmelse. For Undervisningen har formentlig kun den rigtige Form Interesse.

Geometri.

1. Omkredsen af en retvinklet, ligebenet Trekant er given lig p. Siderne beregnes og Trekanten konstrueres.

2. En Cirkelbue AB er 60^0. Radius CA og Tangenten til B skjære hinanden i D. Tangenten til A skjærer BD i E. Find Forholdet imellem Trekanterne CBD og EAD.

3. Den ptolemæiske Sætning fremsættes og bevises. Dernæst anvendes den til at finde Korden til Buen $3a$ af Korderne til Buerne $2a$ og a, idet a har en vilkaarlig Gradstørrelse. Til Exempel findes Korden til 108^0 af dem til 36^0 og 72^0. Den sidste er $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Opl. 1. Katheten kaldes x; saa er

$$2x+x\sqrt{2}=p,\qquad x=\frac{p}{2+\sqrt{2}}=p-\frac{1}{2}\sqrt{2p\,.\,p},$$

hvoraf Konstruktionen fremgaar. Simplest er det maaske at dele p i 3 Stykker, der forholde sig som $1:1:\sqrt{2}$.

2. Man ser let, at $\triangle DBC \sim \triangle DAE$, følgelig

$$\frac{\triangle DBC}{\triangle DAE}=\frac{BC^2}{AE^2}=\frac{r^2}{(\frac{1}{2}S_6)^2}=\frac{r^2}{(\frac{1}{3}r\sqrt{3})^2}=3,$$

idet den omskrevne Sexkants Side er S_6.

Trækkes CE og bemærkes, at $CD=2r$, altsaa $CA=AD$, blive de tre retvinklede Trekanter DAE, CAE og CBE kongruente, altsaa ogsaa saaledes $\triangle DBC=3\,.\,\triangle DAE$.

3. Afsættes 3 Buer a i Fortsættelse af hverandre, og Korderne imellem alle disses Endepunkter trækkes, faas en indskreven Firkant, hvori

$$ch\,3a\,.\,ch\,a=ch^2\,2a-ch^2\,a,$$

idet ch betyder »Korden til«. Heraf faas

$$ch\,3a=\frac{ch^2\,2a-ch^2\,a}{ch\,a}.$$

I Exemplet er $a=36^0$, $2a=72^0$, $3a=108^0$, altsaa

$$ch\,108^0=\frac{r}{2}\,\frac{10-2\sqrt{5}-(6-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}=\frac{2r}{\sqrt{5}-1}=\frac{r(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

LITERATUR.

Emil Buchwald og **Andr. Sch. Steenberg:** Plangeometrisk Konstruktionsbog, til Brug i lærde Skoler og Realskoler (P. G. Philipsen 1886).

Ved fjerde Klasses Examen i de lærde Skoler og Realafgangsexamen lader Fremstillingen selv af rigtige Løsninger og Konstruktionsopgaver ofte meget tilbage at ønske. Censoren føler sig ikke altid sikker paa, at Eleven virkelig er vant til at udføre alle de enkelte Operationer, hvoraf Løsningen bestaar, og den skriftlige Redegjørelse mangler ofte Præcision. Den forelagte Bog, i hvilken baade Text og Operationer skulle indføres, de sidste paa virkelig forelagte Figurer, forekommer os at være et godt Middel til Indøvelse af den fornødne Orden i den hele Behandling af Konstruktionsopgaver, og vi anbefale det derfor til Mathematiklæreres Opmærksomhed. Disse kunne derefter selv se, hvorvidt det netop passer i deres Undervisning. (H. Z.)

E. Møller: Fejlenes Theori. Kort fremstillet efter de mindste Kvadraters Methode med særligt Hensyn til den økonomiske Landmaaling. (Kbhvn. 1886. Aug. Bang).

Fejltheorien er en af de mathematiske Discipliner, som i en særlig Grad kunde trænge til en kritisk Revision. Praktikeren kan imidlertid ikke vente paa en saadan, men nødes daglig til at bruge den foreliggende Theori som den nu engang er. Det nærværende Skrift har det Formaal at give en letfattelig Fremstilling af de mindste Kvadraters Methode i dens Anvendelse paa den økonomiske Landmaaling. Forfatteren er ikke blind for de theoretiske Vanskeligheder ved Begrundelsen, men gaar let hen over disse for særlig at dvæle ved selve Udjevningsmethoderne, af hvilke han synes os at have givet en meget god Fremstilling, der end yderligere lettes ved stadig Anbringelse af passende valgte Exempler, hentede fra Praxis. Mindre tilfredsstillende finde vi Bogens første Del, hvor vi navnlig kunde have ønsket en fyldigere Fremstilling af de Betingelser, af hvilke den exponentielle Fejllovs Fremkomst afhænger. (J. G)

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.
A. V. Bäcklund, Lund.
A. Th. Daug, Upsala.
H. Gyldén, Stockholm.
Sophie Kowalevski, Stockholm.
G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.
C. A. Bjerknes, Christiania.
O. J. Broch, Christiania.
S. Lie, Christiania.
L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.
L. Lorenz, Kjøbenhavn.
J. Petersen, Kjøbenhavn.
H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.
L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Side

Om Keglesnitskorder, der fra et fast Punkt ses under ret Vinkel. Af *C. Juel* 33

Keglesnitslæren i Oldtiden, af *H. G. Zeuthen*. Anmeldt af *H. Valentiner* 44

Examensopgaver 56

Literatur 64

Bodleian
578

TIDSSKRIFT

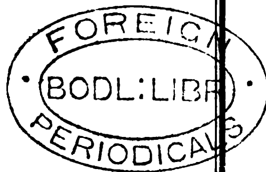
FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.



FEMTE RÆKKE.

Fjerde Aargang.

KJØBENHAVN.
E. JESPERSENS FORLAG.
HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.
1886.

TREDIE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

ADOLPH STEEN.

Født 7de Oktober 1816, død 10de September 1886.

I et højst interessant Foredrag om »Det mathematiske Studiums Fremgang i Danmark i dette Hundredaar«, som findes aftrykt i nærværende Tidsskrifts Aargang 1873, har Professor Steen skildret den Udvikling, hvorved Studiet af Mathematiken herhjemme fra næsten bar Grund har hævet sig saa hurtig og saa højt, som det udtales i følgende Ord. »Selv de mest sangvinske Forhaabninger om det Maal, der ved en kraftig Lærervirksomhed, gode Lærebøger og dygtige Læreres Uddannelse kunde naas, have ikke kunnet vente saa snart at naa den Virkelighed, hvori vi nu bevæge os. Man vilde næppe saa snart have anset et mathematisk Tidsskrift for muligt, ikke saa hurtig troet paa den Overflødighed af Mathematikere til alle Stillinger, hvor denne Videnskab behøves, paa den stadige Tilgang af yngre Kræfter, som vi nu have, ikke at tale om alle dem, der dyrke Mathematik som Hjælpevidenskab. Maatte det mathematiske Studium tidligere hos os staa langt tilbage for det i andre Lande, saa kan det nu paa en hæderlig Maade staa ved Siden deraf.«

Professor Steen skildrer i sit Foredrag de enkelte Mænd, hvem denne Rejsning skyldes, deriblandt den alsidig dannede Degen, den aandfulde, men tidlig bortkaldte von Schmidten og især den grundige og stringente Ramus, lige beundringsværdig for sin omfattende Viden i Mathematiken og for den Paalidelighed, hvormed han begrundede alle Enkeltheder. Maalet vilde imidlertid ikke være naaet saa fuldstændig, den begyndte Fremgang vilde ikke være fortsat saa godt, Betingelserne for den fremtidige Udvikling ikke være saa gode, og Mathematikundervisningen vilde ikke bære Frugt i saa vide Kredse, hvis disse Videnskabsmænd ikke vare blevne fulgte af den fortrinlige Lærer Adolph Steen.

Det er for Mathematiken som Undervisningsgjenstand, at Steens

Virksomhed har haft og gjennem hans Disciple længe vil vedblive at have sin største Betydning. Selv har han ofte — ogsaa i Indledningen til det nys anførte Foredrag — ønsket sin videnskabelige Virksomhed betragtet som knyttet dertil. Derfor skal jeg ikke her dvæle ved hans Afhandlinger i Videnskabernes Selskabs Skrifter eller her i Tidsskriftet, hvis Form gjør dem lettere tilgængelige end Flertallet af mathematiske videnskabelige Arbejder; men jeg vil heller her aflægge en yngre samtidigs Vidnesbyrd om det, som man ikke i Fremtiden vil kunne se af hans Skrifter, nemlig hans Lærervirksomhed og dens Betydning.

Af de personlige Egenskaber, som Steen medbragte til denne Gjerning, skal først nævnes en meget hurtig Dømmekraft. Han vandt let den Klarhed over et foreliggende Emne, som kræves for ogsaa klart at kunne udtale sig om det. Denne Evne tør man ikke ubetinget ønske alle Videnskabsmænd; thi den Kamp og Møje, for hvilken den sparer, er det netop, som giver Anledning til den dybeste saglige Indtrængen og Forstaaelse; men den, der som Steen vil gjøre umiddelbar Anvendelse af sin Indsigt eller meddele den til andre, kommer den i højeste Grad til Gode.

Som hans Tanke hurtig vandt frem til Klarhed hos ham selv, og han let kunde gjøre den klar for andre, saaledes vidste han altid hurtig, hvad han vilde, og lod heller ikke andre tage Fejl deraf. Deri havde han et godt Middel til at sætte sin Villie igjennem.

Til det, han vilde, hørte at udvikle og bruge de Evner, han havde faaet. Synderlig Modstand har han dog i den Henseende ikke kunnet finde hos sig selv; thi Mage til den Arbejdslyst og de Arbejdskræfter, som han havde og bevarede til sin Død i sit 70de Aar, træffer man sjelden.

De ydre Forhold, hvorunder han først kom til at virke, have ogsaa været meget gunstige for at dygtiggjøre ham til hans senere Gjerning. Kort efter (i 1839) at være bleven polyteknisk Kandidat, virkede han fra 1841—1846 som Repetent i Mathematik ved polyteknisk Læreanstalt, den Skole, hvortil hele hans Liv saa nøje har været knyttet, og samtidig underviste han i Fagets Elementer

i Mariboes og Friis's Skoler. Ved denne sidste Undervisning erhvervede han det grundige Kjendskab til, hvad der kan udrettes paa ethvert Standpunkt af Undervisningen, som senere er kommet ham til Gode som Undervisningsinspektør. Som Repetent paa Læreanstalten havde han Lejlighed til at lære at gjøre det Stof, som den Gang af Ramus foredroges i en meget abstrakt Form, tilgængeligt ogsaa for de svagere. Begge Steder paalaa det ham ej blot at forklare, men ogsaa at spørge og indøve. Det er da vistnok der, at han har vænnet sig til den klare Form baade for Meddelelse og Spørgsmaal, som har gjennemtrængt hans Undervisning og gjort ham til en saa fortrinlig Examinator, og at han har vænnet sig til at forlange og at kunne forlange en tilsvarende formel Klarhed hos sine Disciple. Der har han begyndt Udarbejdelsen af den Samling af omhyggelig valgte Exempler til Indøvelse, som ere af saa stor Betydning i hans Lærebøger og have været det i hele hans Undervisning.

Af Betydning for hans Uddannelse har ogsaa et 8 Maaneders Ophold i Paris 1846—47 været. Det var hos de franske Mathematikere, at han søgte Forbilledet for den formelle Klarhed, hvori han selv bragte det saa vidt. Som de lagde han megen Vægt paa en streng Iagttagelse af Logikens ydre Former, de vedtagne som de nødvendige. Efter deres Exempel glemte han ikke at benytte og udvikle den Evne, som han havde til at udtrykke sig i et smukt og velklingende Sprog.

De samme Evner, som Steen lagde for Dagen som Lærer, fik ogsaa Anvendelse paa mange andre Omraader, indenfor hvilke han har indlagt sig store Fortjenester, men som det ikke her er Stedet at omtale. Hos en mindre arbejdsom Mand vilde dette være et Tab for Lærergjerningen; men hos Steen tjente det netop til yderligere Udvikling af disse Evner. Han bragte derfra tilbage til sin Virksomhed for Videnskaben og sin Undervisning den »Livserfaring«, som han i sit alt citerede Foredrag savnede hos Ramus, der »var Stringensen, Klarheden og Skarpheden selv, men tillige noget tør og lidet vækkende . . . ukjendt med Skoleundervisningen, men i Besiddelse . . .«

Steen virkede som Privatdocent ved Universitetet i 1847—48, blev 1850 Docent ved polyteknisk Læreanstalt, virkede 1854—63 tillige ved den militære Højskole, og fra 1857 (til 1885) har han været fast Lærer ved polyteknisk Læreanstalt, fra 1861 tillige Professor ved Universitetet.

Ved disse Undervisningsanstalter var det ikke Fremdragen af nye Synspunkter eller dybsindig Indtrængen i Principerne, der gjorde Steens Foredrag fortrinligt, men den veltalende og klare Form, der paa en sjelden fuldstændig Maade meddelte Tilhørerne hans egne Tanker og hævede dem op til hans egen Forstaaelse. Han var i Stand til at faa ogsaa de Polyteknikere med, som ikke medbragte synderlig mathematisk Interesse, og for hvem Mathematiken kun skulde være et Middel i den senere Livsvirksomhed. For kommende Lærere ved lavere og højere Anstalter blev hans Foredrag et Forbillede for den Undervisning, de selv senere skulde give. Og de, der med videnskabelig Interesse kastede sig over Faget, lærte af ham, at »det dunkelt sagte er det dunkelt tænkte«. De saa ikke blot af hans Exempel, hvorledes en Tanke skal faa den Form, uden hvilken den ikke er fuldbaaren; men Respekten, ja Frygten for den Person, der ved Examinatorier og Øvelser krævede en saadan Form, lærte dem med Alvor at arbejde paa at finde den.

Om dette sidste kunne vist mange vidne af egen Erfaring. Saaledes mindes jeg, at jeg endnu langt senere, naar jeg har affattet en mathematisk Afhandling, har prøvet ej just Slutningernes Gyldighed, men Fremstillingens Tydelighed og formelle Fuldstændighed med den Tanke, hvad Steen vilde sige dertil. Jeg har ikke mindst gjort det, hvor jeg af Hensyn til reelle Fortrin brugte Fremstillingsformer, som afveg fra dem, indenfor hvilke Steen fandt det sikrest at bevæge sig og derfor anbefalede, f. Ex. naar jeg brugte Differentialer og ikke som han næsten altid Differentialkoefficienter. Skjønt jeg som ung Dr. phil. ved et Foredrag, jeg holdt ved Naturforskermødet i Christiania i 1868 kunde vente større Interesse for mit særlige Emne fra andre Sider, tror jeg nok, at jeg under dets Afholdelse tænkte mere paa Steens Dom over Formen.

Som allerede berørt forbandt Steen i de seneste Aar, nemlig fra 1875, med sin Lærervirksomhed Posten som Formand for Inspektionen for de lærde Skoler og (indtil for et halvt Aar siden) for Realskolerne. Med sit Kjendskab til Undervisningen, sin store Energi og af Aarene usvækkede Arbejdsdygtighed var han lige skikket til Udførelsen af det med denne Post forbundne administrative Arbejde og til at give Lærerne de bedste Raad med Hensyn til deres Undervisning og hjælpe dem at naa de foreskrevne Maal. En saadan Støtte behøvedes ogsaa ikke mindst for hans egne Fags Vedkommende, for at hæmme den skadelige Virkning af en ved politiske Kombinationer tilvejebragt Skolelov, som lader Mathematikundervisningen ophøre netop paa den Tid, da den skulde begynde at sætte Frugt i Aandsudviklingen og samtidig anvendes ved Undervisningen i Naturlære. Heri støttedes omvendt han af de for en stor Del af ham selv uddannede, dygtige Lærere, som vore Skoler have i Mathematik og Naturlære trods de Lønningsforhold, som i lang Tid fra alle Sider have været erkjendte for utilbørlig slette. At jeg her nærmest holder mig til Steens Virksomhed for hans egne Fag, kommer af, at jeg bedst kjender denne; men Steen viste ikke disse en uberettiget Begunstigelse.

Den tidligere berørte Aabenhed og Uforbeholdenhed, hvormed Steen gav sine Tanker og Følelser Luft, har især i hans yngre Aar kunnet vække Anstød og har ganske vist, især da den sædvanlig var forbunden med absolut formel Overlegenhed over hans Modstandere, kunnet være mindre behagelig for disse. De, der lærte ham nærmere at kjende, kom imidlertid snart til at føle sig vel netop ved denne Aabenhed, som fjernede al Uklarhed og indgjød ubetinget Tillid. Mest Fortræd kunde den gjøre ved Examensbordet, særlig paa Examinander, der her saa Steen første Gang. Hans Evne til at gjøre sine Spørgsmaal til disse klare og forstaaelige var beundringsværdig; men Examinanden var ofte mere opmærksom paa det Udtryk af Utaalmodighed, som kunde ligge i Spørgerens Tone og Miner. Den, der kjendte ham, vidste derimod, at Steens Dom lige saa lidet som selve hans Spørgsmaal paavirkedes af den Utaalmodighed, som nu en Gang skulde have Luft,

og som ofte kunde komme af et velvilligt Ønske om, at Kandidaten skulde svare bedre.

Det er derfor forstaaeligt, at Steens Disciple, med hvem han ogsaa gjerne samledes ved de polytekniske Kandidatgilder og andre muntre Fester, ej blot saa paa ham med Højagtelse og Tillid, men ogsaa kom til at holde meget af ham. Forhenværende Disciple have bevaret disse Følelser, og for de fleste vil Steen spille en Hovedrolle i de gode Minder fra polyteknisk Læreanstalt. De, som ere vedblevne at staa i Forhold til ham og ere komne til at arbejde sammen med ham, ville bestandig bedre have lært hans varme Hjerte og trofaste Sind at kjende og ofte have set praktiske Prøver derpaa.

Særlig varmt og trofast slog hans Hjerte for hans Fædreland, hvad han indtil sine sidste Dage ogsaa har lagt for Dagen paa anden Maade. I dets Tjeneste er den Gjerning gjort, som jeg her har søgt at skildre, og denne Gjerning vil ikke være spildt.

H. G. Zeuthen.

TALTHEORETISKE UNDERSØGELSER.

(AF A. S. BANG).

1. Idet m og n ere indbyrdes primiske, er $a-1$ største fælles Faktor for a^m-1 og a^n-1.

(Alle Bogstaver betegne her som i det følgende hele Tal).

Ethvert Tal, som gaar op i a^m-1 og i a^n-1, gaar tillige op i $a^{mx-ny}-1$, idet $mx>ny$, og da m og n ere primiske, kan man bestemme x og y saaledes, at $mx-ny=1$, altsaa gaar Tallet op i $a-1$, som følgelig er største fælles Faktor for a^m-1 og a^n-1.

Største fælles Faktor for $a^{\alpha_1}-1$, $a^{\alpha_2}-1\ldots a^{\alpha_n}-1$ er a^f-1, hvor f er største fælles Faktor for α_1, $\alpha_2\ldots\alpha_n$.

Idet f_1 er st. f. F. for α_1 og α_2, er $\alpha_1=mf_1$ og $\alpha_2=nf_1$, hvor m og n ere primiske; st. f. F. for $a^{\alpha_1}-1=(a^{f_1})^m-1$ og

$a^{a_2} - 1 = (a^{f_1})^n - 1$ er da $a^{f_1} - 1$. Er nu f_2 st. f. F. for f_1 og a_3, altsaa for a_1, a_2 og a_3, bliver $a^{f_2} - 1$ st. f. F. for $a^{f_1} - 1$ og $a^{a_3} - 1$, altsaa tillige for $a^{a_1} - 1$, $a^{a_2} - 1$ og $a^{a_3} - 1$.

Fortsættes saaledes, faar man tilsidst, at $a^f - 1$ er st. f F. for $a^{a_1} - 1$, $a^{a_2} - 1 \ldots a^{a_n} - 1$.

2. For at bestemme mindste fælles Multiplum for $a^{a_1} - 1$, $a^{a_2} - 1 \ldots a^{a_n} - 1$ benyttes en Sætning, som er opstillet af Pullich som Opgave 354 i dette Tidsskrift, nemlig:

Idet for et vilkaarligt Antal givne Tal p betegner Tallenes Produkt, p_r Produktet af de største fælles Faktorer for Tallene, tagne sammen i Grupper paa r, vil

$$m = \frac{p \cdot p_3 \cdot p_5 \cdot p_7 \cdots}{p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 \cdots}$$

bestemme Tallenes mindste fælles Multiplum.

Lad en Primfaktor a forekomme i alle de givne Tal i Potenserne $a_1, a_2 \ldots a_n$, hvor $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \ldots \geqq a_n$.

Tager man da Grupperne paa r Tal, vil st. f. F. for en af disse indeholde a i den laveste Potens, hvori det findes i noget at Tallene i den Gruppe. Da man endvidere har $K_{s-1,\,r-1}$ Grupper, for hvilke a^{a_s} er den laveste Potens af a, giver dette, at st. f. F. for hver af de $K_{s-1,\,r-1}$ Grupper indeholder a i Potensen a_s; p_r indeholder da følgende Faktorer af a

$$(a^{a_r})^{K_{r-1,\,r-1}},\ (a^{a_{r+1}})^{K_{r,\,r-1}} \ldots (a^{a_s})^{K_{s-1,\,r-1}} \ldots$$
$$(a^{a_n})^{K_{n-1,\,r-1}}.$$

(Heraf faar man endvidere, da der findes $K_{n,\,r}$ Grupper, at
$$K_{r-1,\,r-1} + K_{r,\,r-1} + K_{r+1,\,r-1} + \ldots K_{n-1,\,r-1} = K_{n,\,r}).$$

Heraf følger, at Produktet

$$\Pi\,(a^{a_s})^{1+K_{s-1,2}+K_{s-1,4}+\ldots-K_{s-1,1}-K_{s-1,3}\cdots},$$

idet det udstrækkes til Potenserne $a_1, a_2 \ldots a_n$ af a, maa angive a i den Potens, hvori det forekommer i m, dog maa herfra undtages a^{a_1}, som forekommer i første Potens. Da man har

$$1+K_{s-1,2}+K_{s-1,4}+\ldots-K_{s-1,1}-K_{s-1,3}\cdots = (1-1)^{s-1} = 0,$$

ser man heraf, at de Primfaktorer, som findes i alle de givne Tal,

i m maa forekomme i de højeste Potenser, hvori de forekomme i noget af Tallene.

Saafremt a kun findes i t af Tallene, kan den samme Udvikling dog benyttes, idet kun a_{t+1}, $a_{t+2} \ldots a_n$ ere Nul; m vil altsaa indeholde de samme Primfaktorer som de opgivne Tal i de højeste Potenser, hvori de forekomme i noget af Tallene, og er da Tallenes mindste fælles Multiplum.

Heraf kan man ved Anvendelse af Sætningen i 1 faa m. f. M. for $a^{\alpha_1} - 1$, $a^{\alpha_2} - 1 \ldots a^{\alpha_n} - 1$, idet man ved den nævnte Sætning kan bestemme st. f. F. for r af Tallene. Saaledes er m. f. M. for $a^{30} - 1$, $a^{12} - 1$ og $a^8 - 1$

$$\frac{(a^{30}-1)(a^{12}-1)(a^8-1)(a^2-1)}{(a^6-1)(a^2-1)(a^4-1)} = (a^{30}-1)(a^6+1)(a^4+1).$$

For Fuldstændigheds Skyld bevises tillige den anden i samme Opgave stillede Sætning, skjønt den ikke bliver anvendt i det følgende:

Betegner P_r Produktet af de mindste fælles Multipla for alle Grupper paa r Tal, vil

$$f = \frac{p \,.\, P_3 \,.\, P_5 \ldots}{P_2 \,.\, P_4 \ldots}$$

bestemme største fælles Faktor for Tallene.

Som før betegner a et Primtal, som findes i de opgivne Tal i Potenserne a_1, $a_2 \ldots a_n$. Idet m. f. M. for Tallene i en af Grupperne paa r Tal indeholder a i den højeste Potens, hvori det forekommer i noget af Tallene i den Gruppe, vil der være $K_{n-s,r-1}$ Grupper, hvis m. f. M. indeholder a i Potensen a_s, saa at Produktet

$$\Pi\left(a^{a_s}\right)^{1+K_{n-s,2}+K_{n-s,4}+\ldots-K_{n-s,1}-K_{n-s,3}\ldots}$$

angiver den Potens af a, som forekommer i f, hvor Undtagelse maa gjøres med a^{a_n}, som findes i første Potens.

Man ser heraf, at f vil indeholde de Primfaktorer, som findes i alle de givne Tal i de laveste Potenser, hvori de forekomme i noget af Tallene.

Findes a kun i t af Tallene, ere a_{t+1}, $a_{t+2} \ldots a_n$ Nul, saa at a forekommer i nulte Potens i f, som altsaa er Tallenes største fælles Faktor.

3. Lad $t = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ være opløst i sine Primfaktorer og M betegne mindste fælles Multiplum for $a^{\frac{t}{p_1}} - 1$, $a^{\frac{t}{p_2}} - 1 \ldots a^{\frac{t}{p_n}} - 1$; vi ville da betegne $\frac{a^t - 1}{M}$ ved $F_t(a)$, saa at man (i Følge Sætningen i 2) har

$$F_t(a) = \frac{(a^t - 1)(a^{\frac{t}{p_1 p_2}} - 1)(a^{\frac{t}{p_1 p_3}} - 1) \ldots (a^{\frac{t}{p_{n-1} p_n}} - 1)(a^{\frac{t}{p_1 p_2 p_3 p_4}} - 1) \ldots}{(a^{\frac{t}{p_1}} - 1)(a^{\frac{t}{p_2}} - 1) \ldots (a^{\frac{t}{p_n}} - 1)(a^{\frac{t}{p_1 p_2 p_3}} - 1) \ldots}.$$

Man kan nu bevise, at

$$a^t - 1 = F_1(a) . F_{p_1}(a) . F_{p_2}(a) \ldots F_{p_1 p_2}(a) \ldots F_{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}}(a) \ldots F_t(a),$$

idet man har medtaget alle $F_d(a)$, hvor d er Divisor i t.

Indsætter man Værdierne af $F_1(a)$, $F_{p_1}(a)$, $F_{p_2}(a) \ldots F_{p_1 p_2}(a) \ldots$, vil Udtrykket indeholde $a^t - 1$ en Gang i Tælleren, saa at Sætningen vil være bevist, saafremt $a^m - 1$, naar $m = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ findes lige mange Gange i Tælleren og Nævneren.

Antages $\alpha_1 > a_1$, $\alpha_2 > a_2 \ldots \alpha_r > a_r$, vil $a^m - 1$ forekomme som Faktor i $F_{fm}(a)$, naar f er 1 eller Produktet af et vilkaarligt Antal af Primfaktorerne $p_1, p_2 \ldots p_n$, og findes i Tælleren eller i Nævneren, eftersom der er et lige eller ulige Antal Primfaktorer (til det første Tilfælde regnes 1).

$a^m - 1$ vil da forekomme lige saa mange Gange i Nævneren, som Antallet af Tallene $p_1, p_2, \ldots p_n, p_1 p_2 p_3 \ldots$ angiver, og i Tælleren saa mange Gange, som Antallet af Tallene $1, p_1 p_2, p_1 p_3 \ldots p_{n-1} p_n, p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots$, altsaa i Nævneren $K_{n,1} + K_{n,3} + \ldots$ og i Tælleren $1 + K_{n,2} + K_{n,4} + \ldots$ Gange, hvoraf følger, at $a^m - 1$ findes lige mange Gange i Tæller og Nævner.

Her antoges, at $p_1, p_2 \ldots p_r$ forekom i lavere Potens i m end i t; saafremt nogle af dem, $p_1, p_2 \ldots p_k$ forekom i samme Potens i m og i t, vilde $a^m - 1$ kun være Faktor i $F_{mf}(a)$, naar f var Produktet af nogle af Primfaktorerne $p_{k+1}, p_{k+2} \ldots p_n$, da mf skal være en Faktor i t, hvoraf vilde følge, at $a^m - 1$ fandtes $K_{n-k,1} + K_{n-k,3} + \ldots$ Gange i Nævneren og $1 + K_{n-k,2} + \ldots$ altsaa lige saa mange Gange i Tælleren, hvorved Sætningen er bevist.

4. Det kan endvidere bevises, at $F_t(a)$ er en hel algebraisk Funktion af a med hele Koefficienter.

Da dette gjælder om $F_1(a)$ og $F_{p_1}(a)$, behøver man kun at bevise, at naar det gjælder om alle $F_d(a)$, idet d gaar op i t, gjælder det ogsaa om $F_t(a)$. Under denne Forudsætning vil

$$\frac{a^t - 1}{F_t(a)} = M = F_1(a) \,.\, F_{p_1}(a) \,.\, F_{p_2}(a) \ldots F_{\frac{t}{p_1}}(a)$$

være en hel algebraisk Funktion af a med hele Koefficienter.

Lad nu $f(a)$ betegne det mindste hele algebraiske Udtryk, hvori $a^{\frac{t}{p_1}} - 1$, $a^{\frac{t}{p_2}} - 1 \ldots a^{\frac{t}{p_n}} - 1$ gaa op; $f(a)$ er da Produktet af de forskjellige irreduktible algebraiske Udtryk, som findes i $a^{\frac{t}{p_1}} - 1$, $a^{\frac{t}{p_2}} - 1 \ldots a^{\frac{t}{p_n}} - 1$, og da ethvert af disse Udtryk er en Faktor i M, hvilket indses ved at opløse dem i Faktorer ved Sætningen i 3, maa $f(a)$ enten være lig M eller en Faktor i M.

Saafremt $M = f(a) \,.\, f_1(a)$, kan man vælge et saadant helt Tal a_1, at $f_1(a_1)$ er større end 1, saa at den tilsvarende Værdi af M er større end $f(a_1)$, hvilket er umuligt, da $f(a)$ er et Multiplum og M det mindste fælles Multiplum for $a^{\frac{t}{p_1}} - 1$, $a^{\frac{t}{p_2}} - 1 \ldots a^{\frac{t}{p_n}} - 1$.

M er altsaa Produktet af de forskjellige irreduktible Udtryk i $a^{\frac{t}{p_1}} - 1$, $a^{\frac{t}{p_2}} - 1 \ldots a^{\frac{t}{p_n}} - 1$, og da ethvert af disse Udtryk er en Faktor i $a^t - 1$, maa $a^t - 1$ dele sig i 2 hele algebraiske Udtryk (som følgelig maa have hele Koefficienter), af hvilke det ene er M, altsaa er $F_t(a)$ en hel algebraisk Funktion med hele Koefficienter.

$F_t(a)$ er endvidere, ifølge 3, af Graden

$$t + \frac{t}{p_1 p_2} + \frac{t}{p_1 p_3} + \ldots \frac{t}{p_1 p_2 p_3 p_4} - \frac{t}{p_1} - \frac{t}{p_2} \ldots - \frac{t}{p_1 p_2 p_3} \ldots = t\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\ldots,$$

altsaa af Graden $\varphi(t)$.

5. Man faar heraf følgende Sætning om den binomiale Ligning: Ligningen $x^t - 1 = 0$ vil dele sig i lige saa mange hele algebraiske Ligninger, som der er Divisorer i t, og kaldes disse $1, \alpha, \beta \ldots t$, ere disse Ligninger af Graderne $\varphi(1), \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \ldots \varphi(t)$.

Heraf følger endvidere den bekjendte Sætning, at

$$\varphi(1) + \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \ldots \varphi(t) = t.$$

Ex. Ligningen $x^{24} - 1 = 0$ vil, da $24 = 2^3 . 3^1$, dele sig i $4 . 2 = 8$ Ligninger af Graderne $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(12) = 4$ og $\varphi(24) = 8$.

Udføres Regningen, faar man:

$$x^{24} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$$
$$(x^4 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1).$$

Det er bekjendt, at $F_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots x + 1 = 0$, naar p er et Primtal, er irreduktibel. Beviset herfor støtter sig paa, at Ligningen af n'te Grad

$$x^n + px . f(x) + p = 0,$$

hvor $f(x)$ er en hel algebraisk Funktion, er irreduktibel, og at $F_p(x + 1) = 0$ har denne Form. Da $F_{2p}(x - 1) = 0$ har samme Form, maa altsaa tillige $F_{2p}(x) = 0$ være irreduktibel.

Det kan endvidere bevises, at saavel $F_{p^n+1}(x + 1) = 0$ som $F_{2p^n+1}(x - 1) = 0$ have samme Form.

Man har nemlig $F_{p^n+1}(x + 1) =$

$$(x+1)^{p^n(p-1)} + (x+1)^{p^n(p-2)} + (x+1)^{p^n(p-3)} + \ldots (x+1)^{p^n} + 1 = 0.$$

Tager man heri et vilkaarligt Led $x^{a . p^n + r}$, hvor $r < p^n$ og ikke delelig med p^n, har dette Koefficienten

$$K_{p^n(p-1),\, ap^n+r} + K_{p^n(p-2),\, a . p^n+r} + \ldots K_{p^n(a+1),\, a . p^n+r}.$$

Nu er $K_{b . p^n,\, a . p^n+r}$, hvor $b > a$, lig

$$\frac{(b . p^n)(b . p^n - 1)(b . p^n - 2) \ldots (b . p^n - ap^n - r + 1)}{1 . 2 . 3 \ldots (a . p^n + r)}.$$

p vil findes i lige saa høj Potens i $(b . p^n - 1)(b . p^n - 2) \ldots (b . p^n - a . p^n - r + 1)$ som i $1 . 2 . 3 \ldots (a . p^n + r - 1)$, saa at

naar r er delelig med p^α, hvor $\alpha < n$, $p^{n-\alpha}$ vil gaa op i $K_{b.p^n, a.p^n+r}$, altsaa ogsaa i Koefficienten til $x^{a.p^n+r}$.

Saafremt $r = 0$, vil derimod Tælleren og Nævneren være delelige med samme Potens af p.

Deles $K_{b.p^n, a.p^n} = \dfrac{b.p^n(b.p^n-1)(b.p^n-2)\dots((b-a)p^n-1)}{1.2.3\dots a.p^n}$

i 2 Faktorer, af hvilke den ene indeholder de Faktorer, som ere primiske med p, den anden dem, som ere delelige med p, vil saavel Tæller som Nævner i den første, i Følge Wilsons Sætning, være kongruente med 1, medens den anden, naar hver af dens Faktorer i Tælleren og i Nævneren divideres med p, bliver

$$\frac{b.p^{n-1}(b.p^{n-1}-1)(b.p^{n-1}-2)\dots}{1.2.3\dots a.p^{n-1}} = K_{b.p^{n-1}, a.p^{n-1}}.$$

Man faar følgelig

$$K_{b.p^n, a.p^n} \equiv K_{b.p^{n-1}, a.p^{n-1}} \equiv \dots \equiv K_{b.p, a.p} \equiv K_{b, a},$$

hvorved Koefficienten til $x^{a.p^n}$ bliver kongruent med

$K_{p-1, a} + K_{p-2, a} + \dots K_{a, a} = K_{p, a+1}$ (i Følge en Formel i 2), og da $K_{p, a+1} \equiv 0 \ (mod\, p)$, er Koefficienten delelig med p.

Koefficienten til x^0 er p, saa at Ligningen har den angivne Form.

Tillige indses det, at $F_{2p^n}(x-1) = 0$ har samme Koefficienter, hver anden med modsat Fortegn, som $F_{p^n}(x+1) = 0$, saa at saavel $F_{p^n}(x) = 0$ som $F_{2p^n}(x) = 0$ ere irreduktible.

6. Om $F_t(a)$ kan mærkes følgende Sætning.

Naar t og u ere primiske, og man i Udtrykket for $F_u(a)$ indsætter $F_t(a^n)$ i Stedet for $a^n - 1$, faar man $F_{t.u}(a)$.

Ifølge Betydningen af $F_t(a)$, har man

$$F_t(a) = F_{p_1p_2\dots p_n}(b), \text{ naar } b = a^{\frac{t}{p_1p_2\dots p_n}}.$$

Da endvidere $F_{p_1p_2\dots p_n}(b^n) = F_t(a^n)$, vil Sætningen være bevist, naar den gjælder for $t = p_1p_2\dots p_n$.

Nu er $F_{p_1u}(a) = \dfrac{F_u(a^{p_1})}{F_u(a)}$, hvilket indses ved at dele $F_{p_1u}(a)$

i 2 Faktorer, af hvilke den ene indeholder alle de Faktorer $a^m - 1$, hvor m er delelig med p_1, den anden dem, hvor m er primisk med p_1.

Deraf følger atter, at

$$F_{p_1 p_2 u}(a) = \frac{F_{p_2 u}(a^{p_1})}{F_{p_2 u}(a)} = \frac{F_u(a^{p_1 p_2}) . F_u(a)}{F_u(a^{p_1}) . F_u(a^{p_2})}$$

og heraf atter

$$F_{p_1 p_2 p_3 u}(a) = \frac{F_u(a^{p_1 p_2 p_3}) . F_u(a^{p_1}) . F_u(a^{p_2}) . F_u(a^{p_3})}{F_u(a^{p_1 p_2}) . F_u(a^{p_1 p_3}) . F_u(a^{p_2 p_3})} \text{ o. s. v.,}$$

saa at Sætningen gjælder.

7. Den følgende Udvikling gaar ud paa at finde Formen af de hele Tal, som gaa op i $F_t(a)$.

Det er indlysende, at man intet kan bevise om Tal, der gaa op i $F_1(a) = a - 1$ og $F_2(a) = a + 1$, da disse kunne være hvilke som helst. Derimod har man Sætningen:

Naar p er et ulige Primtal, vil $F_p(a)$, saafremt $a - 1$ er primisk med p, kun indeholde Primfaktorer af Formen $\alpha p + 1$, er $a - 1$ delelig med p, indeholdes tillige p i første Potens.

En Primfaktor n til $a^p - 1$ gaar tillige op i $a^{n-1} - 1$; nu er enten $n - 1$ primisk med p, i hvilket Tilfælde n gaar op i $a - 1$, som er st. f. F. for $a^p - 1$ og $a^{p-1} - 1$, eller ogsaa er $n - 1$ delelig med p, saa at n har Formen $\alpha p + 1$.

Man faar altsaa, at $F_p(a) = \frac{a^p - 1}{a - 1}$. foruden Primfaktorer af Formen $\alpha p + 1$ kun kan indeholde Primfaktorer, som gaa op i $a - 1$; er af disse P, bliver $a \equiv 1 \ (mod\ P)$, hvoraf

$$F_p(a) = a^{p-1} + a^{p-2} + \dots a + 1 \equiv p \ (mod\ P),$$

saa at $P = p$.

Nu er $a - 1$ delelig med p, altsaa $a = a_1 p + 1$, hvoraf følger, da $p_1 \geqq 3$, at

$$F_p(a) = F_p(a_1 p + 1) = Kp^2 + a_1 p \left(\frac{p-1}{1} + \frac{p-2}{1} + \dots 2 + 1\right) + p$$
$$= p^2 \left(K + a_1 \frac{p-1}{2}\right) + p,$$

saa at den højeste Potens af p, der gaar op i $F_p(a)$ er p^1.

Er p et vilkaarligt Primtal og $a^{p^{k-1}} - 1$ primisk med p, indeholder $F_{p^k}(a)$ kun Primfaktorer af Formen $\alpha . p^k + 1$, er $a^{p^{k-1}} - 1$ delelig med p, indeholdes tillige p i første Potens.

En Primfaktor n til $a^{p^k} - 1$ gaar tillige op i $a^{n-1} - 1$. Her er enten $n - 1$ delelig med p^k eller en højere Potens af p, saa at $n = \alpha . p^k + 1$, eller ogsaa er $n - 1$ delelig med p^r, idet $r < k$, i hvilket Tilfælde n gaar op i $a^{p^r} - 1$, som nemlig er st. f. F. for $a^{p^k} - 1$ og $a^{n-1} - 1$, og da $a^{p^r} - 1$ gaar op i eller er lig $a^{p^{k-1}} - 1$, gaar n op i $a^{p^{k-1}} - 1$.

Enhver Primfaktor P til $F_{p^k}(a) = \dfrac{a^{p^k} - 1}{a^{p^{k-1}} - 1}$, som ikke er af Formen $\alpha . p^k + 1$, tilfredsstiller altsaa Kongruensen $a^{p^{k-1}} \equiv 1$, saa at

$$F_{p^k}(a) = (a^{p^{k-1}})^{p-1} + (a^{p^{k-1}})^{p-2} + \dots$$
$$(a^{p^{k-1}}) + 1 \equiv p \ (mod\ P),$$

hvoraf $P = p$.

Saafremt p er et ulige Primtal, ses det som før, at p kun forekommer i første Potens.

Saafremt $p = 2$, er

$$F_{p^n}(a) = \frac{a^{2^n} - 1}{a^{2^{n-1}} - 1} = (a^{2^{n-2}})^2 + 1 = m^2 + 1.$$

For at 2 skal gaa op i $m^2 + 1$, maa m være ulige, og da $m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$ er delelig med 8, er $m^2 + 1 = 8a + 2$, saa at den højeste Potens af 2, der gaar op deri, er 2^1.

Specielt faar man, at enhver Faktor til $2^{2^m} + 1$ har Formen $\alpha . 2^{m+1} + 1$, en Sætning, som kan benyttes ved Undersøgelsen af, om $2^{2^m} + 1$ er et Primtal. Som en Anvendelse skal undersøges $2^{2^5} + 1$.

$2^{2^5} + 1$ har, saafremt det ikke er et Primtal, Primfaktorer af Formen $64\alpha + 1$, og man behøver kun at gjøre Prøve med Primtal < 66537.

De første af disse ere

193, 257, 449, 641, 769, 1153, 1237, 1409, 1601, 2113, 2689 ...

Prøven viser, at 641 gaar op i $2^{2^5}+1$; de øvrige Primfaktorer maa da tillige gaa op i $\frac{2^{2^5}+1}{641}=6700417$, hvor Prøven kun behøver at fortsættes til 2689. Da intet af de 11 Tal gaar op i 6700417, har man $2^{2^5}+1$ opløst i sine Primfaktorer, saaledes $641 . 6700417$ [1]).

8. Idet t er et vilkaarligt helt Tal, vil $F_t(a)$ foruden Primfaktorer af Formen α^t+1 kun kunne indeholde en Primfaktor p_1 i første Potens, naar denne gaar op i $a^{\frac{t}{p_1}}-1$ og p_1-1 er delelig med de øvrige Primfaktorer i t.

Da $F_t(a)=\frac{a^t-1}{M}$, idet M er m. f. M. for $a^{\frac{t}{p_1}}-1$, $a^{\frac{t}{p_2}}-1\ldots$ $a^{\frac{t}{p_n}}-1$, vil $\frac{a^t-1}{a^{\frac{t}{p_1}}-1}$ være et Multiplum af $F_t(a)$; da endvidere

$$\frac{a^t-1}{a^{\frac{t}{p_1}}-1}=\frac{b^{p_1^{\alpha_1}}-1}{b^{p_1^{\alpha_1-1}}-1},$$

idet $b=a^{\frac{t}{p_1^{\alpha_1}}}$, vil dette (i Følge Sætningen i 7) og følgelig ogsaa $F_t(a)$ foruden Primfaktorer af Formen $\alpha . p_1^{\alpha_1}+1$ kun kunne indeholde en Primfaktor p_1 i første Potens. Analogt indses, at enhver Primfaktor P til $F_t(a)$ foruden Primfaktorerne $p_1, p_2 \ldots p_n$ har Formen $\beta . p_2^{\alpha_2}+1$, $\gamma . p_3^{\alpha_3}+1\ldots$, saa at $P-1$ er delelig med $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$, altsaa med t, hvorved P faar Formen $\alpha t+1$.

Antages endvidere, at p_1 gaar op i $F_t(a)$, og erindres at

$$F_t(a)=F_{p_1^{\alpha_1}n}(a)=\frac{F_n(a^{p_1^{\alpha_1}})}{F_p(a^{p_1^{\alpha-1}})},$$

idet $n=p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3}\ldots p_n^{\alpha_n}$, faar man, at p_1 gaar op i Brøkens Tæller, saa at, da p_1 er primisk med n, p_1 maa have Formen $\alpha n+1$, hvormed Sætningen er bevist.

---

[1]) Samme Fremgangsmaade er anvendt af Euler, som tillige har angivet lignende Sætninger. Se Legendre: Theorie des nombres 2 partie § 5. Pag. 222 eller Schwarz: Elemente der Zahlentheorie. Pag. 128.

Man kan endvidere angive den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F_t(a)$ er delelig med p_1.

Sætter man som tidligere $b = a^{\frac{t}{p_1 p_2 \cdots p_n}}$, da maa p_1 gaa op i $b^{p_2 p_3 \cdots p_n} - 1$. Lad os nu antage, at m er det mindste hele Tal, for hvilket $b^m - 1$ er delelig med p_1; m gaar da enten op i eller er lig $p_2 p_3 \dots p_n$, og Betingelsen for, at $b^k - 1$ er delelig med p_1, bliver at $k = m . k_1$.

Saafremt nu $m = p_2 . p_3 \dots p_r$, faar man i Følge Sætningen i 6,

$$F_t(a) = F_{p_1 p_{r+1} \cdots p_n m}(b) = \frac{F_m(b^{p_1 p_{r+1} \cdots p_n}) . F_m(b^{p_1 p_{r+1} \cdots p_{n-2}}) \dots}{F_m(b^{p_1 p_{r+1} \cdots p_{n-1}}) \dots}.$$

Tager man nu en af Faktorerne $F_m(b^s)$, og udvikles denne i et Produkt af Faktorer, er den eneste af disse, hvori p_1 gaar op, $b^{s.m} - 1$, da Exponenten skal være delelig med m.

Heraf følger, at Betingelsen for, at $F_t(a)$ er delelig med p_1, er at, idet $b^m = c$,

$$\frac{(c^{p_1 p_{r+1} \cdots p_n} - 1)\ (c^{p_1 . p_{r+1} \cdots p_{n-2}} - 1) \dots}{(c^{p_1 . p_{r+1} \cdots p_{n-1}} - 1) \dots}.$$

er delelig med p_1.

Da $c \equiv 1$, ville efter Bortdivision med $c - 1$ af Faktorerne i Tælleren og i Nævneren, de af Tallene, hvis Exponent er primisk med p_1 selv være primiske med p_1, medens de, hvis Exponent er delelig med p_1, selv ville være delelige med p_1 i første Potens, og da der af saadanne, naar undtages Tilfældet $p_{r+1} \cdot p_{r+2} \cdots p_n = 1$, findes lige mange i Tæller og i Nævner, vil p_1 kun gaa op i $a^t - 1$, naar $p_{r+1} \cdot p_{r+2} \cdots p_n = 1$.

Resultatet er da:

Naar $p_1 = a p_2 p_3 \cdots p_n + 1$, og den mindste Værdi af x, som tilfredsstiller Kongruensen

$$b^x \equiv 1 \ (mod\, p_1)$$

er $p_2 p_3 \cdots p_n$, bliver $F_{p_1 p_2 \dots p_n}(b) = F_t(a)$ delelig med p_1, ellers ikke.[1]

(Fortsættes).

[1]) Betingelsen bliver altsaa, at a skal høre til Exponenten $p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$ for Primtallet p_1.

ET THEOREM OM DEN HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF 2DEN ORDEN.

(AF P. FOLDBERG).

Lad y_1 og y_2 være to partikulære Integraler i den homogene lineære Differentialligning

$$y'' = Py' + Qy. \tag{1}$$

Man har da de to Identiteter

$$y_1'' = Py_1' + Qy_1,$$
$$y_2'' = Py_2' + Qy_2,$$

hvoraf
$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = P(y_1 y_2' - y_2 y_1')$$

og heraf atter ved Division med $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ og Integration

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = ce^{\int Pdx}. \tag{2}$$

Denne Ligning er ret vigtig; den kan benyttes til at finde det ene partikulære Integral, naar man kjender det andet, eller til at finde de partikulære Integraler, naar der er givet en Relation mellem dem.

Er $y_1 = f(y_2)$, altsaa $y_1' = f'(y_2) y_2'$,

bliver (2)

$$y_2' [f(y_2) - f'(y_2) y_2] = ce^{\int Pdx},$$

hvoraf ved Integration

$$\int [f(y_2) - f'(y_2) y_2] dy_2 = \int ce^{\int Pdx} dx. \tag{3}$$

Man kunde imidlertid finde y_2 paa en anden Maade. Ved videre Differentiation af den givne Ligning $y_1 = f(y_2)$ faas

$$y_1'' = f'(y_2) y_2'' + f''(y_2)(y_2')^2.$$

Indsættes dette samt Udtrykkene for y_1 og y_1' i den første af ovenstaaende Identiteter, bliver denne

$$f'(y_2) y_2'' + f''(y_2) \cdot (y_2')^2 = Pf'(y_2) y_2' + Qf(y_2).$$

Multipliceres den anden af Identiteterne med $f'(y_2)$ og subtraheres fra denne, faar man

$$f''(y_2)(y_2')^2 = Q[f(y_2) - y_2 f'(y_2)],$$

hvoraf

$$\int \frac{dy_2}{\sqrt{\frac{f(y_2) - y_2 f'(y_2)}{f''(y_2)}}} = \int \pm \sqrt{Q}\, dx. \qquad (4)$$

Ved imellem (3) og (4) at eliminere y_2 faas en Relation imellem P og Q, der angiver Betingelsen for, at 2 partikulære Integraler i (1) staa i Relationen $y_1 = f(y_2)$. Er denne opfyldt, findes y_2 af (3) eller (4), y_1 er da ogsaa bestemt, og derved den primitive Ligning.

Er saaledes $$y_1 = y_2^m,$$

giver (3) $$\frac{(1-m)\, y_2^{m+1}}{m+1} = c \int e^{\int P dx} dx.$$

(4) giver efter en Ændring

$$y_2 = c_1 e^{\pm \int \sqrt{-\frac{Q}{m}}\, dx}.$$

Ved Elimination af y_2 mellem disse faar man

$$c \int e^{\int P dx} dx = \frac{1-m}{1+m} c_1^{m+1} e^{\pm (m+1) \int \sqrt{-\frac{Q}{m}}\, dx}.$$

Denne Ligning differentieres, derpaa tages Logarithmen, dernæst differentieres atter og reduceres, og man faar

$$P = \pm (m+1) \sqrt{-\frac{Q}{m}} + \frac{Q'}{2Q}.$$

Staa Koefficienterne i Differentialligningen

$$y'' = Py' + Qy$$

i denne Relation til hinanden, saa staa de partikulære Integraler i Relationen $y_1 = y_2^m$, og $y_2 = e^{\pm \int \sqrt{-\frac{Q}{m}}\, dx}$, altsaa den primitive Ligning

$$y = c_1 e^{\pm \int \sqrt{-\frac{Q}{m}}\, dx} + c_2 e^{\pm m \int \sqrt{-\frac{Q}{m}}\, dx}.$$

Specielt ses for $m = -1$, at naar $P = \frac{Q'}{2Q}$, saa er den primitive Ligning

$$y = c_1 e^{\int \sqrt{Q}\, dx} + c_2 e^{-\int \sqrt{Q}\, dx},$$

hvis Q er positiv, men

$$y = c_1 \cos \int \sqrt{-Q}\, dx + c_2 \sin \int \sqrt{-Q}\, dx,$$

hvis Q er negativ.

EXAMENSOPGAVER.

Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt 1886.

1. I) Der ønskes konstrueret en Trekant ABC, hvor Siden c, Højden paa samme h og Forholdet mellem de to andre Sider a og b ere givne.

II) Der ønskes konstrueret en Trekant ABC, hvor Siden c og Højden paa samme h ere givne, og hvor Forholdet $\frac{a}{b}$ er saa stort som muligt.

III) Der ønskes konstrueret en Trekant ABC, hvor Forholdet $\frac{a}{b}$ og Højden paa den tredie Side h ere givne, og hvor Siden c er saa lille som muligt.

Opl. I) Naar man gaar ud fra Siden $AB = c$, bestemmes Vinkelspidsen C som Skjæringspunkt mellem en ret Linie parallel med AB og en Cirkel, hvori en Diameter EF deles harmonisk af A og B. Der er 2, 1 eller ingen Opløsning.

I de i Opgaverne II) og III) omspurgte Grænsetilfælde skulle de to geometriske Steder berøre hinanden, og man finder, at Cirklens Radius bliver lige stor med h.

Cirklens Centrum O maa da i II bestemmes saaledes, at $OA \,.\, OB = h^2$. Det kan da bestemmes ved en Cirkel om Midtpunktet af AB som Centrum, der gaar gjennem Endepunktet G af en paa AB vinkelret Linie $AG = h$. Af dennes Skjæringspunkter med AB vælges det, som ligger nærmest ved A.

I III vil $\frac{AE}{BE} = -\frac{AF}{BF} = \pm\frac{b}{a}$ og $EF = 2h$ være bekjendte. Den første Relation giver en Figur ligedannet med den søgte, hvorefter $EF = 2h$ indføres.

2. I en Trekant ere Siderne opgivne

$$a = \sqrt{2{,}0175'},\; b = \sqrt{1{,}0256'},\; c = \sqrt{0{,}9575'};$$

find Trekantens Vinkler og Areal; endvidere Vinklerne i og Arealet af den Trekant, som til Sider har den givne Trekants Medianer,

og endelig Vinklerne i og Arealet af den Trekant, som til Medianer har den givne Trekants Sider.

Opl. Vinklerne bestemmes lettest ved deres *coss.* En femcifret Tavle giver da

$$A = 90^0\ 59'\ 40'',$$
$$B = 45^0\ 28'\ 1(4)'',$$
$$C = 43^0\ 32'\ 1(0)''.$$

Endvidere er $T = \frac{1}{2} bc \sin A = 0{,}49540 \square'$. (Paa Grund af A's Nærhed ved 90⁰ giver dette Udtryk en nøjagtigere Bestemmelse end de analoge).

Medianerne bestemmes ved

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = 0{,}4871(75),$$
$$m_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2) = 1{,}2311,$$
$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) = 1{,}2821(75).$$

Vinklerne bestemmes dernæst som i den første Trekant og blive

$$\angle(m_b m_c) = 36^0\ 15'\ 40'',$$
$$\angle(m_c m_a) = 70^0\ \ 5'\ 2(9)'',$$
$$\angle(m_a m_c) = 73^0\ 38'\ 48''.$$

Arealet kunde bestemmes som Arealet T af den forrige Trekant, men er for øvrigt ifølge Jul. Petersen Methoder og Theorier S. 57 lig med $\frac{3}{4} T = 0{,}37155 \square'$.

Den paa det nys anførte Sted udførte Konstruktion viser endvidere, at den tredie omspurgte Trekant er ligedannet med den anden i det lineære Forhold $\frac{4}{3}$. Dette vilde ogsaa faas ved Regning, idet, naar d, e og f ere Sider i Trekanterne med Medianer a, b, c, Ligningerne

$$4a^2 = 2e^2 + 2f^2 - d^2,$$
$$4b^2 = 2f^2 + 2d^2 - e^2,$$
$$4c^2 = 2d^2 + 2e^2 - f^2,$$

give $d^2 = \frac{4}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{16}{9} m_a^2$ o. s. v.

Den sidste Trekants Areal bliver $\frac{4}{3} T = 0{,}66053 \ \square'$.

3. Hvilken Værdi maa man give a, naar Ligningerne:

$$(2 + a)\, x + ay + 5z = b,$$
$$(3 - a)\, x - 4y + 3z = -1,$$
$$ax + y + (a + 3)\, z = b - 1,$$

enten ikke skulle kunne tilfredsstilles af endelige Værdier af x, y og z eller tilfredsstilles af uendelig mange saadanne?

For hver enkelt af de fundne Værdier af a prøves der, hvor vidt x, y og z, eller nogen enkelt af disse Størrelser, blive ubestemte for alle Værdier af b eller for bestemte Værdier af denne Størrelse, og der gjøres Rede for de dertil svarende Beskaffenheder af Ligningerne.

Naar $b = 4$, medens a er vilkaarlig, ønskes Udtrykkene for x, y og z forkortede saa meget som muligt [NB. Ved den foregaaende Undersøgelse er det nødvendigt at bruge de uforkortede Udtryk.]

Opl. Ligningerne give

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b & a & 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ b-1 & 1 & a+3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 2+a & b & 5 \\ 3-a & -1 & 3 \\ a & b-1 & a+3 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} 2+a & a & b \\ 3-a & -4 & -1 \\ a & 1 & b-1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2+a & a & 5 \\ 3-a & -4 & 3 \\ a & 1 & a+3 \end{vmatrix}}.$$

Betingelsen for, at disse Værdier af x, y og z skulle være uendelige eller ubestemte, er, at den sidste Determinant, som vi ville kalde D, er Nul, eller

$$0 = \begin{vmatrix} 2+a & a & 5 \\ 3-a & -4 & 3 \\ a & 1 & a+3 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & a+3 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} 0 & a-8 & 11 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & a+6 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a-8 & 11 \\ -3 & a+6 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(a^2 - 2a - 15) = (a+1)(a-5)(a+3).$$

Den første Reduktion er funden ved, at $a + 1$ er Faktor i de Elementer, som dannes ved Addition af de to første Piller. (Den, som ikke finder en saadan Reduktion, kan udregne Determinanten og dernæst paa sædvanlig Maade bestemme de rationale Rødder i en Ligning af 3die Grad).

$\underline{a = -1}$ gjør de to første Piller i D identiske. Den giver $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \frac{0}{0}$, med mindre b bestemmes saaledes, at ogsaa Tællerne i x og y forsvinde. Dette sker for $b = 4$. Identiteten af de to Piller gjør, at de tre Ligninger kun indeholde de to ubekjendte $x - y$ og z. $b = 4$ bliver Betingelsen for, at den ene af disse skal kunne udledes af de 2 andre. At for $b \gtrless 4$ en vilkaarlig Værdi af z i Forbindelse med $x = \infty$, $y = \infty$ kan tilfredsstille alle tre Ligninger, beror paa, at den ubestemte Værdi af $x - y$, da kan antages forskjellig i hver af disse.

For $\underline{a = 5}$ faas for alle Værdier af b, de ubestemte Værdier $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$, $z = \frac{0}{0}$. Det ses ogsaa, at den tredie Ligning i dette Tilfælde dannes ved Addition af de to første.

For $\underline{a = -3}$ faas i Almindelighed uendelige Værdier for x, y og z; men for $b = 2$ blive de alle ubestemte. Den 3die Ligning multipliceret med 11 fremkommer i dette Tilfælde som Differens mellem første multipliceret med 3 og anden multipliceret med 5.

Af det her viste ses, at $a - 5$ for alle Værdier af b er fælles Faktor for alle 4 Determinanter, og at for $b = 4$ $a + 1$ ogsaa er det. Da Determinanterne med Undtagelse af D alle ere af anden Grad i a, blive deres Faktorer til $(a + 1)$ $(a - 5)$ Koefficienterne til a^2, som let lade sig bestemme særskilt ved Udeladelse af de Led, som ikke indeholde a; man finder altsaa for $b = 4$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{1}{a + 3}.$$

4. Tangenten i et Punkt A af en Hyperbel antages at skjære Asymptoterne i B og C. Hyperblens Centrum kaldes O. Det ønskes bevist, at Produktet af B's og C's Afstande fra en bevægelig

Tangent staar i et konstant Forhold til Produktet af A's og O's Afstande fra samme.

Opl. Tages Hyperblens Axer til Koordinataxer og kaldes Koordinaterne til den bevægelige Tangents Røringspunkter ξ og η, og Koordinaterne til A, B og C henholdsvis $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, bliver det søgte Forhold f bestemt ved

$$f = \frac{\left(\frac{\xi x_2}{a^2} - \frac{\eta y_2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\xi x_3}{a^2} - \frac{\eta y_3}{b^2} - 1\right)}{-\left(\frac{\xi x_1}{a^2} - \frac{\eta y_1}{b^2} - 1\right)},$$

hvor a og b betegne Halvaxerne.

Ved Hjælp af Asymptoternes og Tangentens Ligninger faas endvidere

$$\frac{x_2}{a} = \frac{y_2}{b} = \frac{1}{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}},$$

$$\frac{x_3}{a} = -\frac{y_3}{b} = \frac{1}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}.$$

Ved Indsættelse heraf faas

$$f = \frac{\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b} - \frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} - \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)}{-\left(\frac{\xi x_1}{a^2} - \frac{\eta y_1}{b^2} - 1\right)},$$

eller idet baade (ξ, η) og (x_1, y_1) ligge paa Hyperblen,

$$f = \frac{2 - 2\frac{\xi x_1}{a^2} + 2\frac{\eta y_1}{b^2}}{-\left(\frac{\xi x_1}{a^2} - \frac{\eta y_1}{b^2} - 1\right)} = 2.$$

Skolelærerexamen, Maj 1886.

Regneopgave Nr. 1. (3 Timer). Der kjøbes i Stettin 2 Ladninger Rug, den ene paa $633\frac{1}{3}$ Hektoliter til en Pris af 124 Reichsmark for $11\frac{7}{8}$ Hektoliter, den anden paa $516\frac{2}{3}$ Hektol. til 35 Rmk. for $3\frac{1}{8}$ Hektol. Fragten betales med ialt 498 Kr. 40 Øre. Under Vejs hertil svinde begge Ladninger, men saaledes,

at Forholdet mellem deres Størrelse bliver uforandret, og af det, der er tilbage, sælges strax $\frac{4}{19}$ af første Ladning og $\frac{5}{31}$ af anden saaledes, at der for det sidste Parti faas 1 Kr. mere pr. Tønde end for det første. Resten af Rugen oplægges i Pakhus, hvor den endvidere svinder $1\frac{2}{3}$ pCt. Derefter er der $633\frac{4}{15}$ Tønde tilbage, som sælges under et for 16,80 Kr. pr. Tønde. Naar der i Pakhusleje betales 107,88 Kr., og hele Udsalgsprisen for begge Ladninger udgjør 12,938 Kr. 88 Øre, saa spørges:

I. Hvor mange Procent af Indkjøbspris med Fragt udgjør Fortjenesten?

II. Hvor mange Procent svandt hver Ladning under Vejs?

III. Hvad fik man i Udsalg for 1 Tønde af hvert af de først solgte Partier?

(1 Hektoliter = $103\frac{1}{2}$ danske Potter; 1 Tønde = 144 Potter; 1 Reichsmark = $88\frac{8}{9}$ Øre).

Opl.

$$633\tfrac{1}{3}\cdot\frac{124\text{ Rmk.}}{11\frac{7}{8}} = 6613\tfrac{1}{3}\text{ Rmk.}$$
$$516\tfrac{2}{3}\cdot\frac{35}{3\frac{7}{8}} = 4666\tfrac{2}{3}\ \text{—}$$
$$11280\text{ Rmk.}$$

$$11280\cdot\frac{88\frac{8}{9}\text{ Ø.}}{100} = 10001\text{ Kr. }60\text{ Ø.}$$
$$\text{Fragt}\quad 498\ \text{—}\ 40\ \text{—}$$
$$10500\text{ Kr.}$$

$$12938{,}88 - 107{,}88 - 10500 = 2331;\ \frac{2331\cdot100}{10500} = 22\tfrac{1}{5}\text{ pCt.}$$

$$(633\tfrac{1}{3} + 516\tfrac{2}{3})\cdot\frac{103\frac{1}{2}}{144} = 826\tfrac{9}{16}\text{ Td.}$$

$$633\tfrac{4}{15}\cdot\frac{100}{98\frac{1}{3}} = 644\text{ Td.};\ 633\tfrac{1}{3} : 516\tfrac{2}{3} = 38:31.$$

$$38\cdot\frac{15}{19} : 31\cdot\frac{26}{31} = 15:13;\ \frac{15}{28}\cdot644\text{ Tdr.} = 345\text{ Tdr.}$$
$$\frac{13}{28}\cdot644\ \text{—}\ = 299\ \text{—}$$

$$345\cdot\frac{19}{15} = 437\ \text{Td.}$$
$$299\cdot\frac{31}{26} = 356\tfrac{1}{2}\ \text{—}$$
$$793\tfrac{1}{2}\text{ Td.}$$

$$\frac{100\cdot(826\frac{9}{16} - 793\frac{1}{2})}{826\frac{9}{16}} = 4\text{ pCt.}$$

$$(437 - 345) \,.\, x + (356\tfrac{1}{2} - 299)(x + 1) =$$
$$12938{,}88 - 633\tfrac{4}{15} \,.\, 16{,}80 = 2300$$
$$x = 15;\; x + 1 = 16 \text{ Kr.}$$

Regneopgave Nr. 2. (2 Timer). 1. Januar 1886 udsætter A 4000 Kr. til $5\frac{3}{8}$ pCt. p. A. og B samtidig dermed 6000 Kr. til 5 pCt. p. A., alt Rente af Rente, men A. forøger hvert følgende Aars 1. Januar sin Kapital med 300 Kr.

I. Hvor meget ejer A den 31. December 1899?

II. Hvis A af sine Penge kun fik 5 pCt. p. A. lige som B, hvor længe vilde det da vare, inden de ejede lige meget?

I Besvarelsen maa angives, hvilken Logarithmetavle der er brugt.

Opl. I. $x = 4000 \,.\, 1{,}05375^{14} = 8325{,}67,$

$$y = 300 \,.\, 1{,}05375^{13} + \ldots .\, 300 \,.\, 1{,}05375 =$$
$$\frac{300 \,.\, 1{,}05375\,(1{,}05375^{13} - 1)}{0{,}05375} = 5735{,}62,$$
$$8325{,}67 + 5735{,}62 = \mathbf{14061{,}29}.$$

II. $6000 \,.\, 1{,}05^{x} = 4000 \,.\, 1{,}05^{x} + 300 \,.\, 1{,}05^{x-1} + \ldots 300 \,.\, 1{,}05,$

$$2000 \,.\, 1{,}05^{x} = \frac{300 \,.\, 1{,}05\,(1{,}05^{x-1} - 1)}{0{,}05} = 6000 \,.\, 1{,}05^{x} - 6300;$$
$$1{,}05^{x} = 1{,}575;\; x = 9{,}31 \text{ Aar.}$$

Regneopgave Nr. 3. (2 Timer). To Kvadrater *abcd* og *cdef* have Siden *cd* fælles. Der tegnes en Cirkelbue *bf* med *d* som Centrum, en Bue *ae* med *c* som Centrum, og 2 Buer *ab* og *ef*, hver med Centrum i det nærmest liggende Kvadrats Midtpunkt. (Mellem hver 2 af de givne Punkter kan der tegnes 2 Cirkelbuer; her menes i hvert Tilfælde den mindste).

I. Hvis Kvadratsiden er 4,2 Fod, hvor stort bliver da Arealet af den hele Oval?

II. Hvis Ovalens Omkreds er 30 Fod, hvor stort er da Kvadratsiden?

III. Hvis der til Ovalen føjes 4 halvmaanedannede Figurer ved, at der udenom den tegnes 4 Halvcirkler, nemlig *bf* med Centrum i *c*, *ae* med Centrum i *d*, *ab* og *ef*, med Centrer henholdsvis i Midtpunkterne af *ab* og *ef*,

hvilket Forhold bliver der da mellem 1 Kvadrats Areal og hver af disse af 2 Cirkelbuer begrænsede Figurers? ($\pi = \frac{22}{7}$).

Besvarelsen maa ved hver Opgave gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydelig ses.

Opl. I. $bd = 4{,}2\sqrt{2},\ ao = 2{,}1\sqrt{2}.$

$$\text{Ar.} = (4{,}2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + (2{,}1\sqrt{2})^2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 - (2{,}1\sqrt{2})^2 = 60{,}48.$$

II. $bf + fe = 15;\ bf = 10.$

$$2s\sqrt{2} \cdot \pi = 40,\ s = \frac{40 \cdot 7}{22 \cdot 2\sqrt{2}} = 4{,}5.$$

III. $$\frac{s^2\pi}{2} - \left(\frac{1}{4}(s\sqrt{2})^2\pi - \frac{(s\sqrt{2})^2}{2}\right) =$$

$$\frac{s^2\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}s^2\pi - s^2\right) = s^2;\quad s^2 : s^2 = 1.$$

Figurernes Forhold $= 4 : 1$, altsaa $\frac{\text{Kvadrat}}{\text{mindste Halvmaane}} = \frac{4}{1}$.

Geometrisk Tegning. $\overline{\ \ n\ \ }$ Midt paa Papiret tegnes et Kvadrat med Siden 5 n, Sidernes Midtpunkter forbindes med Vinkelspidserne ved 8 — punkterede — rette Linier. Af de derved opstaaede Skjæringspunkter bruges de 8 inderste til Centrer, hvert for en — kraftig trukket — Cirkelbue, der rører de to Centret nærmeste Forbindelseslinier, og den trækkes kun mellem Røringspunkterne og ind mod Kvadratets Midtpunkt for de 4 Buers Vedkommende, hvis Centrer hvert er det af de 8 Punkter, der er nærmest ved en af Kvadratets Sider, medens de 4 andre — hvis Centrer betegnes ved a — vende bort fra Kvadratets Midtpunkt. Koncentrisk med de 4 første Buer tegnes — ogsaa indad — 4 Buer, hvoraf hver forbinder de to nærmeste Punkter a. Endelig tegnes der en — kraftig trukket — Cirkel med Centrum i Kvadratets Midtpunkt og som rører en af de sidst omtalte Buer, og til denne Cirkel tegnes Tangenter fra hvert Punkt a indtil Røringspunktet.

Alle de Linier, hvis Optrækning hidtil ikke er omtalt, trækkes med en tynd, fuld (ɔ: ikke punkteret) Linie.

P r o j e k t i o n s t e g n i n g. I den vandrette Billedplan tegnes et Kvadrat K med Siden lig $\frac{1}{4}$ af Tegnepapirets korteste Side, saaledes at den ene Diagonal i Kvadratet danner en Vinkel paa 60^0 med Grundlinien (Projektionsaxen). I hver af dette Kvadrats Vinkelspidser hviler — paa Spidsen — en regelmæssig firsidet Pyramide, hvis lodrette Høide er lig Diagonalen i Grundfladens Kvadrat, medens dettes Side er parallel med og halv saa stor som K's Side. Paa de 4 Pyramiders Grundflader staar en ret Kegle, hvis forlængede Axe træffer K's Midtpunkt; Keglens Højde er lig Radius i dens Grundflade og lig den halve Diagonal i K. — Dog er Keglens Spids borttaget ved en Kugle med Centrum i Keglens Toppunkt og med Radius lig $\frac{1}{3}$ af Keglens Sidelinie (Skjæringslinien er en vandret Cirkel).

Kugle og Kegle skjæres med en Plan gjennem Kuglecentret og en Diagonal i K.

LØSNING AF OPGAVERNE 316, 526 OG 532.

316. 4 K a n t e r i e t T e t r a e d e r, h v o r a f i k k e 3 l i g g e i s a m m e S i d e f l a d e, e r e g i v n e. H v o r l e d e s m a a T e t r a e d r e t f o r ø v r i g t b e s t e m m e s, n a a r d e t s R u m f a n g s k a l v æ r e s a a s t o r t s o m m u l i g t? I h v i l k e T i l f æ l d e k u n n e T e t r a e d r e t s ø v r i g e S t y k k e r b e s t e m m e s v e d P a s s e r o g L i n e a l?

Lad de fire givne Kanter være a, b, c og d, saaledes at a og c, b og d ere modstaaende, de manglende Kanter ere x og y.

Da er, ifølge R a m u s: E l e m e n t æ r G e o m e t r i Side 245. II., idet Volumen er v, med den der brugte Betegnelse,

$$144\, v^2 + F\,(x, c, b, a, d, y) = 0.$$

x og y bestemmes da, saa at v er Maximum, af $\frac{dF}{dx} = 0$ og $\frac{dF}{dy} = 0$, hvilket giver Ligningerne

$$2\, x^2y^2 + y^4 - y^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (c^2 - d^2)\,(b^2 - a^2) = 0,$$
$$2\, x^2y^2 + x^4 - x^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (a^2 - d^2)\,(b^2 - c^2) = 0.$$

Elimination af y giver

$$3x^8 - 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)x^6 + mx^4 - (a^2 - d^2)(b^2 - c^2) = 0,$$

hvor $m = (a^2 - d^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + 4(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$.

For at denne Ligning skal kunne løses ved Kvadratrod, maa $(a^2 - d^2)(b^2 - c^2) = 0$, da man ikke kan have $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$; Betingelsen for, at saavel x som y kunne udtrykkes ved Kvadratrødder, altsaa konstrueres ved Passer og Lineal, er saaledes

$$(a^2 - d^2)(b^2 - c^2) = 0 \text{ og } (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = 0,$$

altsaa at tre af de givne Kanter ere lige store.

Er i det specielle Tilfælde $a = b = c$, faar man

$$x = y = \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}d^2}.$$

(A. S. Bang).

526. Bevisa att

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 3^k \sin^3 3^{-k} x = \frac{3x}{4}.$$ [1]

(Frans de Brun).

Naar man anvender Formlen

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4},$$

viser det sig, at

$$\sum_{-l}^{+k} 3^k \sin^3 3^{-k} x = \frac{3}{4}(3^k \sin 3^{-k} x - 3^{-(l+1)} \sin 3^{l+1} x),$$

som for $k = \infty$, $l = \infty$ foreløbig bliver ubestemt.

Betegnes de af $\sin 3^{-k} x$ og 3^{-k} afledede Funktioner af k henholdsvis ved $F'(k)$ og $f'(k)$, faas

$$\frac{F'(k)}{f'(k)} = x \cos 3^{-k} x, \text{ som giver } \frac{F'(\infty)}{f'(\infty)} = x.$$

Altsaa

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 3^k \sin^3 3^{-k} x = \frac{3x}{4}.$$

(N. Lund).

---

[1]) Ogsaa løst af P. Foldberg, A. S. Bang og J. L. W. V. Jensen, som bemærker, at Rækken kun er konvergent for x reel.

532. **At bestemme de Cirkler, med Hensyn til hvilke et forelagt Keglesnit er sin egen reciproke Polarfigur.**

Keglesnittet K's reciproke Kurve K_1 og dets Fodpunktskurve med Cirklens Centrum C som Pol ere inverse Kurver, idet Cirklen er Inversionscirkel. Til Bestemmelsen af C benyttes derfor kun den Betingelse, at K_1 skal være ligedannet med K. Da der til Tangenter fra C til det ene Keglesnit svarer uendelig fjerne Punkter i det reciproke, maa C ved Parablen ligge paa begge Kurver, og den givne bliver dets geometriske Sted. Ved Ellipsen maa C ligge indenfor, ved Hyperblen udenfor Kurvens Konkavitet. Det ses endvidere, at Parablen K_1's Tangent i C er vinkelret paa K's Axe, medens Diametren falder paa Forlængelsen af K's Normal, hvoraf følger, at K_1 faas ved at omlægge K saaledes, at Normalen i C falder udad Diametrens Forlængelse og omvendt. Lad K have Ligningen $y^2 = px$, Normalen i C skjære K i et Punkt B med Ordinaten y_1. C har Koordinaterne m og n, og Tangenten danner Vinklen φ med Axen. Man har da, idet R er Cirklens Radius,

$$R^2 = m \,.\, CB = m(n - y_1) \,.\, sec\,\varphi,$$

$\frac{1}{2}(n + y_1)$ er Ordinaten til Røringspunktet for en Tangent parallel med CB, altsaa haves $\frac{p}{n + y_1} = -\frac{2n}{p}$

og $$R^2 = m\left(2n + \frac{p^2}{2n}\right) . \,sec\,\varphi = 2\left(m + \frac{p}{4}\right) . \,n\;sec\,\varphi,$$

hvoraf ses, at Cirklens Radius er mellemproportional mellem den dobbelte Brændstraale og Normalen til Centret.

Ved Ellipse og Hyperbel tages Axerne ($2a$ og $2b$) til Koordinataxer. Idet d betegner Afstanden fra Punktet (m, n) til en Tangent, α dens Vinkel med Abscisseaxen, har man

$$d = \sqrt{a^2\,cos^2\,\alpha \pm b^2\,sin^2\,\alpha} - (m \,.\, cos\,\alpha + n \,.\, sin\,\alpha),$$

der, med d og α som Koordinater, er den polære Ligning for Fodpunktkurven til Polen (m, n). Sættes $d = \frac{R^2}{r}$ og dernæst $r\,cos\,\alpha = x$, $r\,sin\,\alpha = y$, faas Ligningen for K_1

$$(a^2-m^2)x^2+(b_1^2-n^2)y^2-2mnxy-2R^2mx-2R^2ny-R^4=0, \quad (1)$$

hvor $b_1^2 = \pm b^2$. Er K_1 ligedannet med K, maa man have

$$\frac{(a^2+b_1^2)^2}{a^2 b_1^2} = \frac{(a^2-m^2+b_1^2-n^2)^2}{(a^2-m^2)(b_1^2-n^2)-m^2n^2}$$

eller $$a^2b^2(m^2+n^2)^2 = (a^4-b^4)(b^2m^2 \mp a^2n^2), \quad (2)$$

der, med m og n som løbende Koordinater, er Ligningen for C's geometriske Sted. Indførelse af polære Koordinater viser, at Kurven ved Ellipsen er den inverse Kurve til den Hyperbel, der har de samme Axer som Ellipsen; omvendt for Hyperblen. Herved bestemmes Figuren. Ved Ellipsen ligner den Lemniskaten. Ved Hyperblen viser (1) og (2), at eftersom

$$a \gtreqless b \text{ faas } \begin{cases} \text{en Oval.} \\ \text{Centrum.} \\ \text{intet reelt Punkt.} \end{cases}$$

Men det maa endnu vises, at, naar C ligger paa Ovalen, K_1 ikke er ligedannet med K's konjugerede Hyperbel. Dette ses saaledes: En Linie, der i C oprejses vinkelret paa en af Tangenterne fra C, maa altid skjære K. Til Skjæringspunktet svarer en Tangent til K_1, der staar vinkelret paa en Asymptote, saa at Røringspunktet falder i den mindste Asymptotevinkel.

For at bestemme R drages Diametren CO skjærende K i A og B; man ser da let, at naar K bringes til at dække K_1, falde Tangenterne i A og B paa disse Punkters tilsvarende Tangenter til K_1; lad disse skjære AB i A_1 og B_1, man har da

$$A_1C + CB_1 = AB \,.\, sin\, \alpha = R^2\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{CB}\right),$$

$$R^2 = AC \,.\, CB \,.\, sin\, \alpha = \frac{CA \,.\, CB}{OA \,.\, OA'} \,.\, ab,$$

hvor α er Vinklen mellem OA og dens konjugerede Halvdiameter OA'. Til Centret svarer $R^2 = ab$. [1])

(N. Madsen.)

[1]) I Anledning af en af Hr. Madsen indsendt Løsning af Opgave 507 bemærkes, at denne Opgave allerede er løst i Aarg. 1883. S. 191. Ligeledes er i Fortegnelsen over uløste Opgaver fejlagtig medtagne Nr. 496 og 497, som findes løste i samme Aarg. S. 87 og 88, samt 373, 495 og 518, som ere løste S. 121 i Aarg. 1885. Nr. 266 er løst i en Afhandling S. 154 (se Anm.) i Aarg. 1878. (Red.)

OPGAVER TIL LØSNING.

533. Bevis at den uendelige Række

$$1+\frac{a.b}{[1](a-b-1)}+\frac{a(a+1).b(b+1)}{[2](a-b-1)(a-b-2)}+$$
$$\frac{a(a+1)(a+2).b(b+1)(b+2)}{[3](a-b-1)(a-b-2)(a-b-3)}+\dots$$

er konvergent, naar den reelle Del af a er < 1, og da kan summeres ved

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{b}{2}\right).\Gamma(1+b-a)}{\Gamma\left(1+\frac{b}{2}-a\right).\Gamma(1+b)}.$$

b antages vilkaarlig.

(J. L. W. V. Jensen).

534. Find Værdien af det bestemte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tg\,\theta d\theta}{e^{2\pi\,tg\,\theta}-1}.$$

(J. L. W. V. Jensen).

535. Summér de uendelige konvergente Rækker

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\sin\left(2p\pi\frac{l\nu}{l2}\right)$$

og

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cos\left(2p\pi\frac{l\nu}{l2}\right),$$

hvor p er et helt Tal.

(J. L. W. V. Jensen).

536. Bevis, at $\frac{r}{k_{10}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ har Konvergenterne

$$1,\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{7},\ \sqrt[5]{11},\ \sqrt[6]{18},\ \dots\ \sqrt[n]{P_n}\dots,$$

idet $P_n = P_{n-2}+P_{n-1}$. (Edvard Zeuthen).

537. Find Summen af Rækken

$$x+x^2-x^5-x^7+x^{12}+x^{15}-x^{22}-x^{26}+x^{35}+x^{40}-x^{51}-x^{57}-\dots$$

o. s. v.

(Thiele).

538. Find Værdien af

$$\int \frac{2\,P^3 P' + 5\,P P' P'' - 4\,(P')^3 - P^2 P'''}{2\,P^4 - P(P')^2 + P^2 P''}\,dx,$$

hvor P er en hvilken som helst Funktion af x, P', P'' og P''' dens 1ste, 2den og 3die afledede Funktion.

(P. Foldberg).

539. Idet x, y og z betegne et bevægeligt Punkts Afstande fra tre faste Punkter, ønskes — ad elementær Vej — bestemt de fire Punkter, der svare til Minimum af $x + y \pm z$; $x^2 + y^2 \pm z^2$.

(N. Madsen).

540. Givet to Punkter, A og B, og to rette Linier, M og N. Man skal konstruere en Cirkel, der gaar gjennem A og skjærer M i X, N i Y, saaledes, at XY gaar gjennem B, hvorfra tillige Radius til X ses under en given Vinkel.

(N. Madsen).

OPGAVER TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN.

55. En Cirkel er given ved sit Centrum og en Tangent. Man skal fra et givet Punkt trække Tangenter til Cirklen uden at benytte noget Punkt af Cirklen.

Opl. Man benytter en Drejning om Centret.

56. Man kjender to Cirklers Centre og en fælles Tangent. De 3 andre fælles Tangenter skulle konstrueres uden Anvendelse af noget Punkt af de to Cirkler.

Opl. Den givne Tangents og den i Forhold til Centerlinien dermed symmetriske Tangents Skjæringspunkter med de to andre fælles Tangenter bestemmes ved Skjæring med den Cirkel, der har den givne Centerlinie til Diameter.

(R. von Fischer-Benzon).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund, Lund.

A. Th. Daug, Upsala.

H. Gyldén, Stockholm.

Sophie Kowalevski, Stockholm.

G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes, Christiania.

O. J. Broch, Christiania.

S. Lie, Christiania.

L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz, Kjøbenhavn.

J. Petersen, Kjøbenhavn.

H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

	Side
Adolph Steen. Af *H. G. Zeuthen*	65
Taltheoretiske Undersøgelser. Af *A. S. Bang*	70
Et Theorem om den homogene lineære Differentialligning af 2den Orden. Af *P. Foldberg*	81
Examensopgaver	83
Løsning af Opgaverne 316, 526 og 532	91
Opgaver til Løsning	95
Opgaver til Brug ved Undervisningen	96

3

578

TIDSSKRIFT

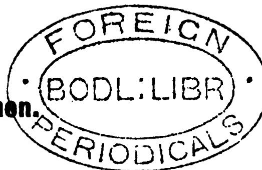
FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.



FEMTE RÆKKE.

Fjerde Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

Hoffensberg & Traps Etabl. — Kjøbenhavn.

1886.

FJERDE OG FEMTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

OM TVERØDDER.

(AF A. S. GULDBERG).

1. Løsningen af Ligninger frembyder maaske klarere end i nogen anden Gren af Mathematiken Bevis for Nødvendigheden af Indførelsen af nye Begreber, Tal og Regneoperationer. Opløsningen af den simple Ligning

$$x \pm a = 0$$

nødvendiggjør saaledes Indførelsen af positive og negative Tal, saafremt man i ethvert Tilfælde vil have en Løsning [1]).

Opløsningen af Ligningen

$$ax \pm b = 0,$$

hvor a og b betegne hvilke som helst hele Tal, nødvendiggjør Indførelsen af Brøktal; thi hvis man ikke vil indføre disse, lader Ligningen sig kun løse, naar a gaar op i b.

Opløsningen af Ligningerne

$$x^2 - a = 0,\ x^3 - a = 0, \text{ o. s. v.}$$

medfører Nødvendigheden af de Regneoperationer, der benævnes Kvadratrod-, Kubikrod-Extraktion o. s. v.

Opløsningen af den kvadratiske Ligning

$$x^2 + ax + b = 0$$

tvinger til Indførelse af imaginære og komplexe Tal af Formen $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; thi uden disse lader Ligningen sig ikke løse for hvilke som helst Værdier af a og b.

Vil man ikke indføre disse »tænkte« Tal, saa vil Ligningen være uopløselig, naar $\frac{a^2}{b}$ er positiv og mindre end Tallet 4. Der ligger i den menneskelige Aand en medfødt Lyst til at generalisere, en Trang til at finde den almindelige Lov eller Formel, der i sig indeslutter alle mulige Tilfælde. Givende efter for denne aandelige Magt søger Mathematikeren at generalisere sine Formler og ledes

[1]) Det positive Tal fremkommer samtidig med det negative som dettes Modsætning.

derved til Indførelsen af nye Begreber, som oprindelig ikke har været i hans Tanker.

Som bekjendt har Abel bevist Umuligheden af at opløse den almindelige Ligning af 5te Grad og følgelig ogsaa Ligninger af end højere Grad ved Hjælp af algebraiske Funktioner, d. e. Funktioner, hvori kun forekomme Regneoperationer, der kunne udføres ved Hjælp af de 5 elementære Regningsarter Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division og Rodextraktion. Det er derfor et forgjæves Arbejde at forsøge paa ved Hjælp af sædvanlige Rodstørrelser at løse almindelige Ligninger af højere Grad end 4de.

2. Den bekjendte Mathematiker Tschirnhausen, en samtidig af Leibnitz, har i Acta Lipsiæ for 1683 vist, hvorledes man bortskaffer forskjellige Led i en given Ligning. Methoden anvendt paa Ligningen af 5te Grad

$$x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0 \qquad (1)$$

bestaar i, at man sætter

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4, \qquad (2)$$

hvor a_0 a_1 o. s. v. betegne ubestemte Størrelser.

Man danner nu y^2, y^3, y^4 og y^5, idet man samtidig benytter Ligning (1) til at bortskaffe alle Potenser af x, som have en højere Exponent end 4. Man faar da:

$$y^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4,$$
$$y^3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4,$$
$$y^4 = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4,$$
$$y^5 = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + e_3 x^3 + e_4 x^4.$$

Af disse 4 sidste Ligninger findes x, x^2, x^3 og x^4 som 4 ubekjendte af 4 Ligninger af første Grad. De fundne Værdier af x, x^2, x^3 og x^4, udtrykte ved y^2, y^3, y^4, y^5 og Koefficienterne b_0, b_1 o. s. v., indsættes i Ligning (2), hvorved erholdes:

$$y^5 + q_1 y^4 + q_2 y^3 + q_3 y^2 + q_4 y + q_5 = 0. \qquad (3)$$

Her er q_1, q_2 o. s. v. hele Funktioner af de ubestemte Størrelser a_0 a_1 a_2 o. s. v.; q_1 er af 1ste Grad med Hensyn til disse Størrelser, q_2 af 2den Grad o. s. v., hvilket følger af, at q_1 er

Summen af Ligningens Rødder med modsat Tegn, q_2 er Summen af Produkterne af to og to af Rødderne o. s. v.

Sætter man nu

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0 \text{ og } q_3 = 0,$$

saa reduceres Ligningen til Formen

$$y^5 + Ay + B = 0.$$

Da q_1 er af 1ste Grad med Hensyn til $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4$, saa kan man af Ligningen $q_1 = 0$ finde a_0 lineært udtrykt ved de fire øvrige Størrelser. Indsættes denne Værdi i de to andre Ligninger, saa bliver disse:

$$q'_2 = 0 \text{ og } q'_3 = 0,$$

hvor q'_2 er en homogen hel Funktion af 2den Grad, q'_3 af 3die Grad. Nu kan en hel homogen Funktion af 2den Grad sættes under Formen

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = 0,$$

hvor f, g, h, k er lineære. Denne sidste Ligning tilfredsstilles ved at sætte

$$f^2 + g^2 = 0 \text{ og } h^2 + k^2 = 0,$$

hvoraf følger:

$$f = g\sqrt{-1} \text{ og } h = k\sqrt{-1},$$

som er lineære Ligninger. Man finder af disse to Ligninger a_1 og a_2 udtrykte lineært ved a_3 og a_4. Indsættes de fundne Værdier for a_1 og a_2 i $q'_3 = 0$, erholdes en Ligning

$$q''_3 = 0,$$

som er af 3die Grad med Hensyn til a_3 og a_4. Den ene af disse to Størrelser kan vælges vilkaarlig, og man finder den anden ved Hjælp af en Ligning af 3die Grad. Efter saaledes at have bestemt a_3 og a_4 erholder man ved Substitution i de foregaaende lineære Ligninger $a_0\ a_1\ a_2$, og Ligningen, hvori y indgaar, erholder som før nævnt Formen:

$$y^5 + Ay + B = 0\ [1]).$$

Heraf følger, at den almindelige Ligning af 5te Grad kan reduceres til Formen

[1]) Konfer Cours d'Algèbre supérieure par J. A. Serret tome I page 420 seqvent.

$$x^5 + ax + b = 0,$$

uden at den derved taber noget af sin almindelige Karakter. Opgaven bliver nu at bestemme Rødderne i denne Ligning, naar a og b er hvilke som helst givne Tal. Dette kan i Følge Abels Bevis ikke ske ved Anvendelsen af sædvanlige Rodtegn, men man maa indføre en ny Funktion. Denne bør defineres af Ligningen selv, naar den er bragt til sin simpleste Form. Da intet Led i Ligningen yderligere kan bortskaffes, staar kun tilbage at reducere de to uafhængige Koefficienter til en. Dette sker ved at sætte

$$x = \frac{b}{a} y,$$

hvorved faas:

$$y^5 + \frac{a^5}{b^4} y + \frac{a^5}{b^4} = 0.$$

eller, naar man sætter $\frac{a^5}{b^4} = c$,

$$y^5 + cy + c = 0.$$

Nogen yderligere Reduktion er umulig, og man nødes nu for at løse Ligningen til at indføre en ny Regneoperation bestemt ved denne Ligning, ligesom man for at løse Ligningen

$$y^5 + c = 0$$

tvinges til at udføre den Regneoperation, som benævnes Extraktion af 5te Rod. I foreliggende Tilfælde nødes man altsaa til at indføre en ny Slags Rodextraktion bestemt ved Ligningen

$$x^5 + cx + c = 0$$

eller

$$\frac{x^5}{1+x} = -c.$$

Man ledes herved naturlig til Indførelsen af en ny algebraisk Funktion defineret ved Ligningen

$$\frac{x^n}{1+x} = c,$$

hvor c kan have en hvilken som helst reel Værdi, positiv eller negativ. Vi betegne denne nye Rod ved

$$\sqrt[n]{c}$$

og kalde den n'te Rod af anden Orden eller Tveroden af n'te Grad.

3. Af Definitionen paa Tveroden af n'te Grad følger umiddelbart de to Ligninger:

$$\frac{(\sqrt[n]{c})^n}{1+\sqrt[n]{c}} = c \text{ og } \sqrt[n]{\frac{c^n}{1+c}} = c.$$

Enhver treleddet Ligning af Formen

$$x^n + ax + b = 0$$

kan nu opløses ved Hjælp af nævnte Rod. Sætter man nemlig

$$x = \frac{b}{a} y,$$

erholdes $y^n + \frac{a^n}{b^{n-1}} y + \frac{a^n}{b^{n-1}} = 0$ eller $\frac{y^n}{1+y} = -\frac{a^n}{b^{n-1}}$,

hvoraf følger umiddelbart

$$y = \sqrt[n]{-\frac{a^n}{b^{n-1}}} = \frac{a}{b} x.$$

Altsaa bliver

$$x = \frac{b}{a} \sqrt[n]{-\frac{a^n}{b^{n-1}}}.$$

Udvider man Definitionen til at gjælde ogsaa for brudden Exponent, saa kan enhver trinomisk Ligning løses ved Hjælp af den sidste Formel. Er nemlig Ligningen

$$x^m + ax^p + b = 0,$$

og sættes $$x^p = x',$$

saa faas: $$x'^{\frac{m}{p}} + ax' + b = 0,$$

hvoraf følger, naar $\frac{m}{p}$ sættes lig n:

$$x' = x^p = \frac{b}{a} \sqrt[n]{-\frac{a^n}{b^{n-1}}},$$

hvoraf atter x findes ved at extrahere p'te Rod.

Exempel. Ligningen $x^3 - 19x + 30 = 0$ har Roden

$$x = -\frac{30}{19}\sqrt[3]{\frac{19^3}{30^2}}.$$

Nu har $\sqrt[3]{\frac{19^3}{30^2}}$ de 3 Værdier $-\frac{19}{15}$, $-\frac{19}{10}$ og $+\frac{19}{6}$; thi man har:

$$\frac{\left(-\frac{19}{15}\right)^3}{1-\frac{19}{15}} = \frac{19^3}{15^2 \,.\, 4} = \frac{19^3}{30^2},$$

$$\frac{\left(-\frac{19}{10}\right)^3}{1-\frac{19}{10}} = \frac{19^3}{10^2 \,.\, 9} = \frac{19^3}{30^2},$$

$$\frac{\left(\frac{19}{6}\right)^3}{1+\frac{19}{6}} = \frac{19^3}{6^2 \,.\, 25} = \frac{19^3}{30^2}.$$

Indsættes disse 3 Værdier for Tveroden, findes følgende 3 Værdier for x:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -5,$$

hvilke ere de 3 Rødder i Ligningen.

4. Man kan udtrykke Roden af anden Orden ved Hjælp af Rødder af 1ste Orden, d. e. sædvanlige Rodstørrelser, idet man gjentager disse uendelig mange Gange.

Sætter man nemlig:

$$x = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + \ldots\ldots}}}}$$

saa faas, idet man ophøjer til n'te Potens:

$$x^n = a + a\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + \ldots}}} = a + ax,$$

hvoraf følger $$\frac{x^n}{1+x} = a,$$

som stemmer med Definitionen paa Tveroden af n'te Grad. Man kan ved Hjælp heraf finde en saa tilnærmet Værdi, som maatte ønskes, for $\sqrt[n]{a}$. Regningen udføres simplest ved Logarithmer [1]).

5. Den sædvanlige Rodstørrelse $\sqrt[n]{a}$ kan geometrisk repræsenteres ved Skjæring mellem den rette Linie

$$y = a$$

og Kurven $$y = x^n;$$

thi elimineres y, faas $x^n = a$, hvoraf $x = \sqrt[n]{a}$.

Paa lignende Maade kan Tveroden $\sqrt[n]{a}$ geometrisk fremstilles ved Skjæring mellem den rette Linie

$$y = ax + a$$

og Kurven $$y = x^n.$$

Thi elimineres y, faas

$$x^n = ax + a, \text{ hvoraf følger } x = \sqrt[n]{a}.$$

Kurven $y = x^n$ er en Art Parabel (for $n = 2$ en sædvanlig Parabel), hvis Form er fremstillet i medfølgende Figurtavle Fig. 1 for n lige, i Fig. 2 for n ulige. Man kan bemærke, at Fig. 2 gaar over i Fig. 1, naar den nedadgaaende Kurvegren drejes 180° om den negative X-Axe. Drages en Linie $AB \neq X$-Axen i Afstanden $OC = a$, saa er i Fig. 1

$$\sqrt[n]{a} = BC = -AC.$$

Linien PE, der skjærer Y-Axen i Afstanden $OC = a$ fra Koordinaternes Begyndelsespunkt og gaar gjennem Punktet P, hvor $OP = -1$, har Ligningen $y = ax + a$. Følgelig er FD og EG, Abscisserne for Liniens Skjæringspunkter med Kurven, de 2 reelle Værdier for $\sqrt[n]{a}$.

I Fig. 2 er paa lignende Maade $\sqrt[n]{a} = BC$ og $\sqrt[n]{a} = EG$, idet her de rette Linier kun skjære Kurven i et Punkt. Det bemærkes, at naar a nærmer sig 0, vil $\sqrt[n]{a}$ nærme sig til Grænsen $\sqrt[n]{a}$, idet Skraalinien $y = ax + a$ i saa Fald gaar over i en horisontal Linie, der falder sammen med X-Axen. Dette kan udtrykkes skriftlig saaledes:

---

[1]) Observator J. J. Åstrand i Bergen har først gjort opmærksom herpaa i sin Afhandling: »Ny Transformation og Løsning af Ligninger af Formen $x^n - ax \pm b = 0$«. 1877.

$$\lim_{a=0} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}.$$

Er i Ligningen $\qquad x^n + ax + b = 0,$
hvis almindelige Udtryk for Roden er

$$x = \frac{b}{a}\sqrt[n]{-\frac{a^n}{b^{n-1}}},$$

Størrelsen $a = 0$, saa bliver følgelig at sætte:

$$x = \lim_{a=0} \left[\frac{b}{a}\sqrt[n]{-\frac{a^n}{b^{n-1}}}\right] = \frac{b}{a}\sqrt[n]{-\frac{a^n}{b^{n-1}}} =$$

$$\sqrt[n]{\frac{b^n}{a^n} \cdot \frac{-a^n}{b^{n-1}}} = \sqrt[n]{-b},$$

hvilket ogsaa følger umiddelbart ved Indsætning af $a = 0$ i den oprindelige Ligning, som derved reduceres til

$$x^n + b = 0.$$

Af Fig. 2 vil ses, at Skraalinien $y = ax + a$ ikke blot kan skjære Kurven $y = x^n$ i et Punkt, men ogsaa i 3 Punkter, hvoraf de to (Skjæringspunkterne med den negative Kurvegren) kan falde sammen til et Punkt, idet Skraalinien tangerer den nedadgaaende Kurvegren. Deraf følger, at for n ulige kan $\sqrt[n]{a}$ have 3 reelle Værdier, hvoraf 2 negative og en positiv Værdi, medens den for n lige stedse har 2 reelle Værdier, en positiv og en negativ, naar a er positiv, ganske som Tilfældet er med $\sqrt[n]{a}$ i sidst nævnte Tilfælde.

6. Man kan ogsaa fremstille geometrisk $\sqrt[n]{a}$ ved Skjæring mellem den horizontale Linie $y = a$ og Kurven $y = \frac{x^n}{1 + x}$; thi elimineres y, faas:

$$\frac{x^n}{1 + x} = a, \text{ hvoraf følger } x = \sqrt[n]{a}.$$

Denne geometriske Fremstillingsmaade har flere Fordele fremfor den foregaaende, idet man derved klarere ser Overgangen fra de reelle ulige Rødder til de lige og derpaa til imaginære Rødder.

I Fig. 3 er fremstillet Kurven $y = \frac{x^n}{1 + x}$, idet n antages at

være et lige Tal. Kurven bestaar af to adskilte Grene, der begge har til Asymptote en ret Linie, dragen parallel Y-Axen i Afstanden -1 fra Koordinaternes Begyndelsespunkt. Drages en Linie DD' parallel X-Axen i Afstanden $OC = a$ fra Koordinaternes Begyndelsespunkt, saa er sammes Ligning

$$y = a$$

og Abscisserne CD og CD' for Liniens Skjæringspunkter med Kurven er de to reelle Værdier af $\sqrt[n]{a}$. Af Figuren ses, at eftersom $OC = a$ gives Værdier fra 0 til $+\infty$, vil Linien DD' begynde med at falde sammen med X-Axen og derpaa, idet den bevæger sig parallel med samme fjerner sig mere og mere fra denne i det uendelige. De to relle Værdier af $\sqrt[n]{a}$ vil for $a = 0$ falde sammen og være lig Nul, derpaa adskilles, idet den ene vil være positiv, den anden negativ. Den positive Værdi af $\sqrt[n]{a}$ vil for voxende Værdier af a stadig tiltage og nærme sig $+\infty$, medens den negative Værdi nærmer sig Grænsen -1.

Af Figuren ses fremdeles, at, naar a er negativ og dens Talværdi mindre end ME, saa erholdes ingen Skjæringspunkter mellem den rette Linie og Kurven; følgelig er alle Værdier af $\sqrt[n]{-a}$ i dette Tilfælde imaginære. Er derimod Talværdien af a større end ME, saa faas to Skjæringspunkter, følgelig to reelle Værdier, som begge er negative. For voxende Værdier af $-a$ vil den ene af de to negative Værdier nærme sig $-\infty$, den anden -1 som Grænse. Er $-a = ME$, har Roden to indbyrdes lige store Værdier, hver lig $-OM$.

For at bestemme Størrelsen af OM og ME bemærke man, at Tangenten til Kurven i Punktet E er parallel X-Axen, altsaa er:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x)\, nx^{n-1} - x^n}{(1 + x)^2} = 0,$$

hvoraf følger $$n(1 + x) - x = 0.$$

Af denne Ligning faas:

$$x = OM = \frac{n}{1 - n}.$$

Indsættes denne Værdi i Kurvens Ligning $y = \dfrac{x^n}{1 + x}$ faas:

$$y = EM = \frac{n^n}{(1-n)^{n-1}}.$$

Heraf følger, at $\sqrt[n]{a}$ er imaginær for alle Værdier af a mellem 0 og $\frac{n^n}{(1-n)^{n-1}}$, naar n er et lige Tal. For alle andre Værdier af a, positive eller negative, har derimod $\sqrt[n]{a}$ to reelle Værdier, hvoraf den ene er positiv, den anden negativ, naar a er positiv, derimod begge negative, naar a er negativ. For $a = \frac{n^n}{(1-n)^{n-1}}$ har $\sqrt[n]{a}$ to lige Rødder, hvis Værdi er $\frac{n}{1-n}$.

Er n et ulige Tal, erholder Kurven $y = \frac{x^n}{1+x}$ en Form, som ses af Fig. 4. Kurven bestaar ogsaa i dette Tilfælde af to adskilte Grene, der har Linien $x = -1$ til Asymptote. Drages en Linie parallel X-Axen i Afstanden OC, hvor $OC > ME$, saa skjærer samme Kurven i 3 Punkter B, D, D', i alle andre Tilfælde kun i et Punkt. Man finder ligesom i foregaaende Tilfælde

$$OM = \frac{n}{1-n} \text{ og } EM = \frac{n^n}{(1-n)^{n-1}}.$$

Heraf følger, at, naar a er et ulige Tal, har $\sqrt[n]{a}$ 3 reelle Værdier, naar a er positiv og større end $\frac{n^n}{(1-n)^{n-1}}$, i alle andre Tilfælde derimod kun en reel Værdi, som er positiv, naar a er positiv, og negativ, naar a er negativ. Det bemærkes, at Fig. 4 gaar over i Fig. 3, naar Partiet om den negative X-Axe drejes 180° om Axen.

7. Ved Hjælp af det i 6 udviklede kan man med Lethed finde Betingelsen for, at den trinomiske Ligning

$$x^n + ax + b = 0$$

har lige Rødder. Roden i Ligningen har nemlig som før paavist (se 3) Formen:

$$x = \frac{b}{a}\sqrt[n]{-\frac{a^n}{b^{n-1}}}.$$

For at Ligningen skal have to lige Rødder er det i Følge 6 nødvendigt, at

$$-\frac{a^n}{b^{n-1}}=\frac{n^n}{(1-n)^{n-1}},$$

som er den søgte Betingelsesligning mellem a og b.

Er denne Betingelsesligning opfyldt, saa er de to lige Rødder udtrykte ved Formlen:

$$x=\frac{b}{a}\cdot\frac{n}{1-n},$$

da man har $$\sqrt[n]{\frac{n^n}{(1-n)^{n-1}}}=\frac{n}{1-n}.$$

Exempel. Er Ligningen $x^5+ax^3+b=0$, saa sættes $x^3=x_1$, hvorved faas:

$$x_1^{\frac{5}{3}}+ax_1+b=0,$$

som har Roden $$x_1=\frac{b}{a}\sqrt[\frac{5}{3}]{-\frac{a^{\frac{5}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}}.$$

Skal Ligningen have lige Rødder, maa ifølge 7:

$$-\frac{a^{\frac{5}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(1-\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{5^{\frac{5}{3}}}{108^{\frac{1}{3}}},$$ hvoraf følger $-\frac{a^5}{b^2}=\frac{5^5}{108}$, som altsaa

er Betingelsesligningen mellem Koefficienterne. Man faar, naar denne Betingelse er opfyldt:

$$x_1=\frac{b}{a}\sqrt[\frac{5}{3}]{\left[\frac{5^5}{2^2\,.\,3^3}\right]^{\frac{1}{3}}}.$$

Nu har Tveroden følgende Værdier $\dfrac{\frac{5}{3}}{1-\frac{5}{3}}=-\frac{5}{2}$, som er den lige Rod; derhos har den Værdien $\frac{5}{2}\left(\frac{2+10^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$, som har

3 Værdier, idet $10^{\frac{1}{3}}$ har 3 forskjellige Værdier[1]. Multipliceres med $\frac{b}{a}$, faas Værdierne for x_1, hvilke blive, idet man bemærker, at ifølge Betingelsesligningen er:

$$a = -\frac{5 \,.\, b^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{2}{5}} \,.\, 3^{\frac{3}{5}}}, \text{ følgelig } \frac{b}{a} = -\frac{2}{5}\left(\frac{36}{2}\right)^{\frac{3}{5}}:$$

den lige Rod $x_1 = \left(\frac{3b}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$ og $x_1 = -\left(\frac{3b}{2}\right)^{\frac{3}{5}}\left(\frac{2+10^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$.

Da $x^3 = x_1$, saa er $x = x_1^{\frac{1}{3}}$; følgelig bliver de 5 Rødder i den oprindelige Ligning:

$$\left(\frac{3b}{2}\right)^{\frac{1}{5}}, \text{ som er en Dobbeltrod, } -\left(\frac{3b}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{2+10^{\frac{1}{3}}}{3}\right),$$

hvilket sidste Udtryk har 3 indbyrdes forskjellige Værdier.

Sætter man

$$\left(\frac{3b}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = 3p, \text{ bliver } -\left(\frac{3b}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{2+10^{\frac{1}{3}}}{3}\right) = -p\,(2+10^{\frac{1}{3}}).$$

Man faar derhos:

$$b = \frac{2}{3} \,.\, 3^5 \,.\, p^5 = 2 \,.\, 3^4 p^5 = 162 p^5,$$

$$a = -5 \,.\, \frac{b^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{2}{5}} \,.\, 3^{\frac{3}{5}}} = -\frac{5}{3}\left(\frac{3b}{2}\right)^{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{3}(3p)^2 = -15p^2.$$

Ligningen kan da skrives under følgende Form:

$x^5 - 15p^2x^3 + 162p^5 = (x-3p)^2\,((x+2p)^3 + 10p^3) = 0$[2].

---

[1]) Man forvisser sig om Rigtigheden heraf ved at substituere

$$x = \frac{5}{2}\left(\frac{2+10^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$$

i Ligningen:

$$\frac{x^{\frac{5}{3}}}{1+x} = \left[\frac{5^5}{2^2 \,.\, 3^3}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Venstre Side af Ligningen bliver da:

$$\frac{2}{3^2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{432 + 180 \,.\, 10^{\frac{1}{3}} + 90 \,.\, 10^{\frac{2}{3}}}{144 + 60 \,.\, 10^{\frac{1}{3}} + 30 \,.\, 10^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3^2}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \,.\, 3 = \left[\frac{5^5}{2^2 \,.\, 3^3}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

[2]) Under denne Form har Hr. V. Trier givet Løsningen af den omtalte Ligning, stillet som Opgave til Løsning af Professor A. Steen. Se Tidsskriftets 5. R. 2den Aarg. (1884) S. 187.

8. En af de første og vigtigste Opgaver, som frembyder sig ved Indførelsen af Tverødder, er at beregne Værdien af en hvilken som helst Tverod. Den almindeligste Opgave bliver at finde

$$\sqrt[n]{a + bi},$$

hvor a og b er givne reelle Størrelser og i betegner $\sqrt{-1}$. Sætter man

$$a + bi = r\,(cos\; v + i\; sin\; v) = r_v$$

og

$$\sqrt[n]{r\,(cos\; v + i\; sin\; v)} = \varrho\,(cos\; \varphi + i\; sin\; \varphi) = \varrho_\varphi,$$

saa følger af Definitionen paa en Tverod:

$$r\,(cos\; v + i\; sin\; v) = \frac{\varrho^n\,(cos\; n\varphi + i\; sin\; n\varphi)}{1 + \varrho\,(cos\; \varphi + i\; sin\; \varphi)}.$$

Sættes $1 + \varrho\,(cos\; \varphi + i\; sin\; \varphi) = \varrho'\,(cos\; \varphi' + i\; sin\; \varphi') = \varrho'_{\varphi'}$,

saa faas:

$$r\,(cos\; v + i\; sin\; v) = \frac{\varrho^n}{\varrho'}\,(cos\,(n\varphi - \varphi') + i\; sin\,(n\varphi - \varphi'))$$

eller kortere:

$$r_v = \left(\frac{\varrho^n}{\varrho'}\right)_{n\varphi - \varphi'}.$$

Heraf følger:

$$r = \frac{\varrho^n}{\varrho'} \text{ og } v = n\varphi - \varphi'.$$

Da i Stedet for v kan skrives $v + 2k\pi$, hvor k er et helt Tal, saa vil

$$v + 2k\pi = n\varphi - \varphi'$$

i Almindelighed give n forskjellige Værdier for φ, hvoraf følger, at Tveroden har i sin Almindelighed n forskjellige Værdier. Betegner A Punktet ϱ_φ i Fig. 5, hvor altsaa $OA = \varrho$ og $\angle AOB = \varphi$, og er $OB = 1$, saa er C Punktet $\varrho'_{\varphi'}$, altsaa $OC = \varrho'$ og $\angle COB = \varphi'$. Er fremdeles $\angle DOB = n\varphi - \varphi' = v$ og $OD = \frac{\varrho^n}{\varrho'} = r$, saa er D Punktet r_v.

Vi har ingen direkte Regnemethode for at finde ϱ_φ af r_v, d. e. at konstruere Punktet A, naar man kjender Punkterne B og D, hvilket ligger i Sagens Natur.

Vi vil i det følgende indskrænke os til kun at betragte det Tilfælde, hvor $b = 0$, altsaa ogsaa $v = 0$. I saa Fald vil Punkterne

B og D i Fig. 5 ligge paa X-Axen. Vi vil fremdeles indskrænke os til at søge de reelle Værdier af $\sqrt[n]{a}$, hvilke i den praktiske Anvendelse er de vigtigste. Forskjellige Methoder kan her komme i Anvendelse, hvoraf anføres følgende.

9. Gauss's Methode. I sin Afhandling »Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen« (Abhdl. d. kgl. Gesellsch. d. Wissenschaften zu Göttingen. VI. B. 1848—50) har Gauss vist, hvorledes Rødderne, baade de reelle og komplexe, i en treleddet Ligning kan findes. Gauss's Methode kan anvendes paa det foreliggende Tilfælde. I de saakaldte Gaussiske Tabeller, der tjene til at finde Logarithmen til to Tals Sum eller Differens, findes 3 Kolonner, der bære Overskrifterne A, B og C, og som indeholde Logarithmerne til Tallene m, $1+\frac{1}{m}$, $1+m$. Ved Hjælp af disse Tabeller kan ad indirekte Vej Opgaven løses. Det bemærkes, at Gauss's bekjendte Løsning af den kvadratiske Ligning er et specielt Tilfælde af det foreliggende mere almindelige, idet han — uden dog at indføre noget særegent Symbol — i i Virkeligheden beregner Værdien af $\sqrt[2]{a}$.[1])

Er $x = \sqrt[n]{a}$, saa er $\frac{x^n}{1+x} = a$ og $n \log x - \log(1+x) = \log a$.

1. n er et lige Tal.

Er a positiv, har Tveroden 2 reelle Værdier, en positiv og en negativ, den sidste i Talværdi mindre end 1 (se Fig. 3).

Den positive Værdi findes af Ligningen:

$$n \log x - \log(1+x) = \log a,$$

ved i de Gaussiske Tabeller at finde (ved sukcessive Approximation) de sammenhørende Værdier af $\log x$ og $\log(1+x)$, som tilfredsstille denne Ligning.

For at finde den negative Værdi af x sættes $x = -x_1$, som indsat giver:

$$\frac{x_1^n}{1-x_1} = a, \text{ hvoraf findes:}$$

[1]) Se »Bidrag til Ligningernes Theori« af A. S. Guldberg, Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger for 1877.

$$x_1^n + ax_1 = x_1\,(a + x_1^{n-1}) = a.$$

Sættes her $x_1^{n-1} = az$, altsaa $x_1 = a^{\frac{1}{n-1}} . z^{\frac{1}{n-1}}$, faas:

$$z^{\frac{1}{n-1}} . a^{\frac{1}{n-1}}\,(a + az) = z^{\frac{1}{n-1}} . a^{\frac{1}{n-1}} . a\,(1 + z) = a,$$

hvoraf $$z\,(1 + z)^{n-1} = a^{-1},$$

altsaa $$log\, z + (n - 1)\, log\,(1 + z) = - log\, a.$$

Af Tabellerne findes de sammenhørende Værdier af $log\, z$ og $log\,(1 + z)$, og man faar derpaa:

$log\,(x_1^{n-1}) = log\,(az)$ d. e. $log\, x_1 = \frac{log\, a + log\, z}{n - 1} = - log\,(1 + z)$.

Er a negativ, saa er alle Værdier af Tveroden imaginære, med mindre at Talværdien af $a \geqq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$. Er denne Betingelse opfyldt, har Tveroden 2 reelle Værdier, begge negative (se Fig. 3). For at finde disse sætter man $x = - x_1$ og $a = - a_1$, hvorved erholdes:

$$\frac{x_1^n}{1 - x_1} = - a_1 \text{ eller } \frac{x_1^n}{x_1 - 1} = a_1, \text{ hvor } x_1 > 1.$$

Sættes derpaa $x_1 - 1 = z$, saa er $x_1 = 1 + z$; følgelig bliver:

$$\frac{(1 + z)^n}{z} = a_1, \text{ altsaa } n\, log\,(1 + z) - log\, z = log\, a_1.$$

I Tabellen findes de sammenhørende Værdier $log\, z$ og $log\,(1 + z)$, som tilfredsstille Ligningen, og man vil i Almindelighed finde to saadanne. Ere disse fundne, saa faas $log\, x_1 = log\,(1 + z)$.

2. n er et ulige Tal.

Er i Ligningen $\frac{x^n}{1 + x} = a$ Størrelsen a positiv, saa har Tveroden stedse en positiv reel Værdi, men saafremt $a \geqq \frac{n^n}{(1 - n)^{n-1}}$ tillige 2 andre reelle Værdier, begge negative (se Fig. 4).

Den positive Værdi af x findes af Ligningen

$$n\, log\, x - log\,(1 + x) = log\, a.$$

For at finde de 2 negative Værdier sættes $x = - x_1$, hvorved faas:

$\frac{- x_1^n}{1 - x_1} = \frac{x_1^n}{x_1 - 1} = a$, idet her $x_1 > 1$ (se Fig. 4). Sættes derpaa $x_1 - 1 = z$, faas:

$$\frac{(1+z)^n}{z} = a, \text{ hvoraf } n \log(1+z) - \log z = \log a.$$

Af Tabellerne findes de sammenhørende Værdier af $\log z$ og $\log(1+z)$, og man vil i Almindelighed finde 2 saadanne. Man faar dernæst

$$\log x_1 = \log(1+z).$$

Er a negativ $= -a_1$, saa har Tveroden kun en reel Værdi, som er negativ og i Talværdi < 1 (se Fig. 4). Sættes $x = -x_1$, faas:

$$\frac{-x_1^n}{1-x_1} = -a, \text{ eller } x_1^n + a_1 x_1 = a_1.$$

Sættes her $x_1^{n-1} = a_1 z$, faas $x_1 = a_1^{\frac{1}{n-1}} . z^{\frac{1}{n-1}}$, som indsat giver:

$$a^{\frac{1}{n-1}} . z^{\frac{1}{n-1}} (a_1 + a_1 z) = a_1, \text{ hvoraf } z(1+z)^{n-1} = a_1^{-1}.$$

Altsaa $\quad \log z + (n-1) \log(1+z) = -\log a_1.$

I Tabellerne findes de sammenhørende $\log z$ og $\log(1+z)$, hvorpaa findes:

$$\log x_1 = \frac{\log a_1 + \log z}{n-1} = -\log(1+z).$$

Sammenstilles disse Ligninger med tilhørende Løsninger, ses, at der kun existerer 3 Former, som findes anførte i følgende Skema:

Nr. 1. $\quad \frac{x^n}{1+x} = +a.$

Løsning. $\quad n \log x - \log(1+x) = \log a.$

Nr. 2. $\quad \frac{x^n}{1-x} = +a$, hvor $x < 1$.

Løsning. $\quad \log z + (n-1) \log(1+z) = -\log a$
og $\log x = -\log(1+z)$.

Nr. 3. $\quad \frac{x^n}{x-1} = +a$, hvor $x > 1$.

Løsning. $\quad n \log(1+z) - \log z = \log a$,
som tilfredsstilles ved 2 forskjellige Værdier af z.
$\log x = \log(1+z)$. 2 Værdier.

Hertil kan føjes følgende Regler, som fremgaa umiddelbart ved Betragtning af Fig. 3 og 4.

Er n lige, har $x = \sqrt[n]{a}$ en positiv reel Værdi, naar a er positiv, som findes af Nr. 1, samt en negativ reel Værdi, hvis Talværdi findes af Nr. 2. Er a negativ, har Tveroden, forudsat at Talværdien af

$$a \geqq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}},$$

to negative reelle Værdier, hvis Talværdier findes af Nr. 3.

Er n ulige, har Tveroden, naar a er positiv, en positiv reel Værdi, som findes af Nr. 1. Er derhos $a \geqq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$, har Tveroden tillige 2 negative reelle Værdier, som findes af Nr. 3. Er a negativ, har Tveroden kun en negativ reel Værdi, hvis Talværdi findes af Nr. 2.

1ste Exempel. At finde $\sqrt[5]{a}$, naar $log\ a = 1{,}08665$.

Da $log\ \frac{5^5}{4^4} = 1{,}08661$, altsaa $a > \frac{5^5}{4^4}$, saa har i foreliggende Tilfælde Tveroden 3 reelle Værdier, hvoraf en positiv og to negative.

Den positive findes af Skemaets Nr. 1:

$$5\ log\ x - log\ (1 + x) = 1{,}08665.$$

Vælges i Kolonne A: $log\ x = 0{,}314$, faas

$$5\ log\ x - log\ (1 + x) = 1{,}08419,$$

— - — —: $log\ x = 0{,}315$, faas

$$5\ log\ x - log\ (1 + x) = 1{,}08852$$

Differens 433.

Den søgte Værdi af $log\ x$ ligger altsaa mellem 0,314 og 0,315. Da 1,08665 — 1,08419 = 246, faas Proportionen:

$$433 : 246 = 1 : \Delta,\ \text{hvoraf}\ \Delta = 0{,}57\ \text{(meget nær)}.$$

Følgelig bliver $log\ x = 0{,}31457$, hvortil svarer $x = 2{,}06335$.

De 2 negative Værdier findes af Skemaets Nr. 3:

$$5\ log\ (1 + z) - log\ z = 1{,}08665.$$

Af den Gaussiske Tabel ses, at z i foreliggende Tilfælde maa være en ægte Brøk. Sættes derfor $z = \frac{1}{m}$, faas:

$$\frac{(1+z)^n}{z} = a, \text{ hvoraf } n\,log\,(1+z) - log\,z = lo$$ [illegible]

Af Tabellerne findes de sammenhørende Værdie [illegible] $log\,(1+z)$, og man vil i Almindelighed finde 2 [illegible] faar dernæst

$$log\,x_1 = log\,(1+z).$$

Er a negativ $= -a_1$, saa har Tveroden ku [illegible] er negativ og i Talværdi < 1 (se Fig. 4). S [illegible]

$$\frac{-x_1^n}{1-x_1} = -a, \text{ eller } x_1^n +$$ [illegible]

Sættes her $x_1^{n-1} = a_1 z$, faas $x_1 = c$ [illegible]

$$a^{\frac{1}{n-1}} . z^{\frac{1}{n-1}} (a_1 + a_1 z) = a_1,$$ [illegible]

Altsaa $log\,z + (n-1)\,log$ [illegible]

I Tabellerne findes de sammenh [illegible] findes:

$$log\,x_1 = \frac{log\,a}{}$$ [illegible] findes

Sammenstilles disse Lign [illegible] der kun existerer 3 For [illegible] 2:

[illegible] 2,57430.

Nr. 1. [illegible] ægte Brok; sættes $z = \frac{1}{m}$, faas:

Løsning. $\left(1 + \frac{1}{m}\right) = 2{,}57430.$

Nr. 2. [illegible] ulfredsstilles Ligningen, og man faar

[illegible] $(1+z) = -0{,}00114 = 0{,}99886 - 1.$

Løsni[illegible] [illegible] a, hvor $log\,a = 2{,}57430$ har to reelle [illegible] garithmer er

Nr. [illegible] 0,887005 og 0,99886 $-$ 1.

L[illegible] Talhme [illegible] 8,44834 og [illegible]

Exempel. At finde $z =$ [illegible] for $n = 5$

rod to lige Værdier $\frac{n}{1-n}$, som for $n = 5$

Tal, har Tveroden tillige en positiv reel

r. 1. Man finder $log\ x = 0{,}31456$,

remkommer i Ligningen

0,

t finder Sted, naar

ve beregnet dens

r nemlig da:

$\frac{b}{a}$.

indirekte, men som

oldsvis simpel og ved Øvelse

ie. Ønsker man flere end 5 Tal

let opnaa en Nøjagtighed svarende

l Vegas sædvanlige 7-cifrede Tabel og

man stedse anvender geometrisk Interpolation.

nds Methode. Observator J. J. Åstrand har

ing »Ny Transformation og Løsning af Lig-

af Formen $x^n - ax \pm b = 0$« (Bergen 1877) vist,

des man direkte kan bestemme en Rod i den treleddede

Ligning. Han sætter $x = y \,.\, a^{\frac{1}{n-1}}$, hvorved Ligningen

$$x^n - (+ ax) \pm b = 0$$

transformeres til

$$y^n - y \pm c = 0, \text{ hvor } c = b \,.\, a^{\frac{n}{1-n}}.$$

Roden i den sidste Ligning kan skrives under Formen:

$$y = \sqrt[n]{\mp c + \sqrt[n]{\mp c + \ldots\ldots}}$$

Følgelig faas:

$$x = a^{\frac{1}{n-1}} . \sqrt[n]{\mp c + \sqrt[n]{\mp c + \sqrt[n]{\mp c + \ldots\ldots}}}$$

Heraf følger — som tidligere anført — at Tveroden kan stilles under følgende Form:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + \ldots\ldots}}}$$

Denne Formel kan nu anvendes til Beregning af Tverodens Logarithme, idet man ved Logarithmetabellens Hjælp sukcessive beregner:

$$log\ a\sqrt[n]{a},\quad log\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a}},\quad log\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a + a\sqrt[n]{a}}}\ \text{o. s. v.}$$

Denne Methode vil i flere Tilfælde forholdsvis hurtig føre til en tilstrækkelig nøjagtig Værdi af den søgte Tverod. I theoretisk Henseende er den nævnte Formel meget mærkelig, for saa vidt som den under explicit Form giver Tverodens n forskjellige Værdier ved Hjælp af de n Værdier af $\sqrt[n]{a}$.

Efter Åstrand anføres følgende Exempel:

$$x^3 - \frac{3139}{12} \cdot x + \frac{26228}{27} = 0.$$

Her er $$x = 16{,}17354 \cdot y,\ c = 0{,}2296076,$$

$$y^3 - y + 0{,}2296076 = 0,$$

hvoraf findes ved Methodens Anvendelse $log\ y = 0{,}0411832_n$,

$$log\ x = 1{,}2499883_n \text{ og } x = -17{,}78232.$$

11. Ved Hjælp af særegne beregnede Tabeller kan man med Lethed direkte beregne Tveroden; men Beregningen af saadanne Tabeller kan selvfølgelig ikke ske for enhver Værdi af n, men man maa indskrænke sig til de i Praxis hyppigst forekommende, f. Ex. $n = 2$, 3, 4 og 5.

Er $x = \sqrt[n]{a}$, saa er $\frac{x^n}{1+x} = a$ og $n\ log\ x - log\,(1+x) = log\ a$.

Ved Hjælp af denne sidste Ligning beregner man Værdien af $log\ a$ svarende til de forskjellige Værdier af $log\ x = log\sqrt[n]{a}$. Efter at have beregnet de sammenhørende Værdier af $log\sqrt[n]{a}$ og $log\ a$ med passende Mellemrum, benyttes Tabellen paa lignende Maade som en sædvanlig Logarithmetabel til at finde Værdierne af $log\sqrt[n]{a}$ svarende til en given Værdi af $log\ a$, idet man anvender geome-

trisk Interpolation, naar den givne Værdi *log a* falder mellem to Tabelværdier. Ved Hjælp af en saadan forud beregnet Tabel er det lige saa let at finde Tverodens Logarithme, som i en sædvanlig Logarithmetabel at finde det Tal, der svarer til en given Logarithme, og Fremgangsmaaden ved Opslaget i Tabellerne er fuldkommen ens. Pladsen tillader os imidlertid ikke her at gaa nærmere ind paa denne Sag, som for øvrigt ingen Vanskeligheder frembyder[1]).

12. Man kan udvikle en given Tverod i en uendelig konvergerende[2]) Række, hvilket simplest sker ved Hjælp af Lagranges Formel, men ogsaa kan ske ved de ubestemte Koefficienters Methode. Sætter man saaledes:

$$\sqrt[n]{x} = a + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3} + ex^{-4} + \ldots\ldots$$

idet man antager $x > 1$, saa faas:

$$(a + bx^{-1} + cx^{-2} + \ldots.)^n = (1 + a)\,x + b + cx^{-1} + dx^{-2} + \ldots. \quad (1)$$

Differentieres logarithmisk, faas:

$$-n(bx^{-2} + 2\,cx^{-3} + 3dx^{-4} + \ldots)\,((1 + a)x + b + cx^{-1} + dx^{-2} + \ldots)$$
$$= (a + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3} + \ldots)\;((1 + a) - cx^{-2} - 2\,dx^{-3} - \ldots).$$

Udføres Multiplikationerne, faas:

$$-n\,[(1 + a)\,b\,.\,x^{-1} + (2\,(1 + a)\,c + b^2)\,x^{-2} + (3\,(1 + a)\,d + 3bc)\,x^{-3} + \ldots.]$$
$$= a\,(1 + a) + (1 + a)\,bx^{-1} + ((1 + a)\,c - ac)\,x^{-2} + ((1 + a)\,d - bc - 2\,ad)\,x^{-3} + \ldots.$$

Sættes Koefficienterne til de ligestore Potenser af x lige, faas, idet man bemærker, at $a = -1$ og $b = a^n$, som følger af Lign. (1) ved at sætte $x = \infty$: $a = -1$, $b = (-1)^n$, $c = -n$,

$$d = \frac{n\,(3\,n - 1)}{2}\,(-1)^n,\quad e = -\frac{n\,(2\,n - 1)\,(4\,n - 1)}{3},\ \ldots.$$

Indsættes disse Værdier, erholdes:

---

1) Tabeller for $n = 2$ og $n = 3$ findes i Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger for 1872; for $n = 5$ sammesteds for Aaret 1871, hvortil Læseren henvises.

1) Anm. af Redaktionen. For denne Paastand maa Forf. bære Ansvaret. Dannelsen af de første Led tyder nærmest paa Divergens.

$$\sqrt[n]{x} = -1 + \frac{(-1)^n}{x} - \frac{n}{x^2} + \frac{n(3n-1)}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{x^3} - \frac{n(2n-1)(4n-1)}{3} \cdot \frac{1}{x^4} + \ldots.$$

Er n et ulige Tal, faa alle Led Tegnet minus; er n et lige Tal, vexler Tegnene.

Exempel. Er $n = 5$, faas:

$$\sqrt[5]{x} = -\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{5.7}{x^3} + \frac{3.5.19}{x^4} + \ldots\right].$$

For $x = 100$ faas, naar 5 Led i Rækken medtages, $\sqrt[5]{100} = -1.01054$. Rækken giver kun den ene af de 2 negative Værdier, nemlig den som er nærmest Enheden (se Fig. 4); den positive Værdi af Tveroden erholdes ikke ved denne Række.

13. Ved Indførelsen af Tverødder aabnes et nyt Felt for Opløsning af algebraiske Ligninger, og det er en Selvfølge, at der tør findes særegne Klasser af Ligninger foruden de nævnte trinomiske, der lade sig løse ved disse nye Rødder.

Sætter man saaledes $x = a + b\sqrt[n]{c}$,

faas $\left(\frac{x-a}{b}\right) = \sqrt[n]{c}$, hvoraf $\left(\frac{x-a}{b}\right)^n = c\left(1 + \frac{x-a}{b}\right)$

eller $(x-a)^n = b^{n-1}.cx + b^{n-1}.c(b-a)$.

Sættes $b^{n-1}.c = \beta$ og $b^{n-1}c(b-a) = \gamma$, faas Rødderne i Ligningen:

$$(x-a)^n = \beta x + \gamma \qquad (1)$$

bestemte ved

$$x = a + b\sqrt[n]{c}, \text{ hvor } b = a + \frac{\gamma}{\beta} \text{ og } c = \frac{\beta^n}{(a\beta+\gamma)^{n-1}}.$$

Til samme Form som Ligning (1) kan tilbageføres:

$(x-a)^n = (\beta x + \gamma)^m$ ved at extrahere m'te Rod og

$\frac{(x-a)^{n.m}}{1+(x-a)^n} = \frac{(\beta x+\gamma)^m}{1+\beta x+\gamma}$ ved at extrahere m'te Tverod.

Ved at anvendes paa de specielle Tilfælde $n = 3$ og $n = 4$ giver Lign. (1) smukke Løsninger af de almindelige Ligninger af 3die og 4de Grad.

Sættes $n = 3$, erholder den kubiske Ligning Formen

$$x^3 - 3ax^2 + px + q = 0,$$

under hvilken Form enhver given kubisk Ligning kan skrives. Roden bliver, naar Værdien indsættes:

$$x = a + \frac{n}{m}\sqrt[3]{\frac{m^3}{n^2}},\ \text{hvor}\ m = 3a^2 - p\ \text{og}\ n = 2a^3 - ap - q.$$

Skal Ligningen have lige Rødder, maa:

$$\frac{m^3}{n^2} = \frac{27}{4}\ \text{eller}\ \left(\frac{m}{3}\right)^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^2.\quad \text{(Se 7).}$$

Indsættes Værdierne for m og n, erholdes følgende Betingelsesligning mellem Ligningens 3 Koefficientèr:

$$q = 2\left[a^3 - \left(a^2 - \frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - ap.$$

Da $\sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ har de 3 Værdier $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3$, saa faas Ligningens 3 Rødder at være:

De to lige Rødder $a - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{m} = a - \sqrt{a^2 - \frac{p}{3}}$.

Den ulige Rod $a + 3 \cdot \frac{n}{m} = a + 2\sqrt{a^2 - \frac{p}{3}}$.

Sættes $n = 4$, erholdes Ligningen:

$$x^4 - 4ax^3 + ba^2x^2 - px + q = 0,$$

hvortil den almindelige Ligning af 4de Grad kan tilbageføres ved Substitutionen $x = x' + k$, hvor k er en Konstant.

Ligningens Rødder udtrykkes ved Formlen:

$$x = a + \frac{n}{m}\sqrt[4]{-\frac{m^4}{n^3}},$$

hvor $m = 4a^3 - p$ og $n = 3a^4 - ap + q$.

14. Har man Ligningen $\frac{f(x)^n}{1 + f(x)} = A$, saa faas ved Extraktion af n'te Tverod:

$$f(x) = a,$$

hvor $a = \sqrt[n]{A}$; men denne Tverod har n Værdier, som kan betegnes med $a_1\ a_2 \ldots a_n$. Man erholder følgelig n Ligninger af Formen $f(x) = a$. Er $f(x)$ en hel Funktion af p'te Grad, har $f(x) = a$ p Rødder. Ved at opløse denne Ligning med Hensyn til x og sukcessive give a Værdierne $a_1\ a_2 \ldots a_n$ erholdes $p \,.\, n$ Værdier for x, som er den oprindelige Lignings Rødder.

Er f. Ex. $f(x) = x^2 + bx + c$, saa erholder Ligningen Formen

$$(x^2 + bx + c)^n = A\,(x^2 + bx + c + 1),$$

hvis $2n$ Rødder findes af $x = -\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + a}$, hvor $a = \sqrt[n]{A}$ har n Værdier.

Sættes $x = a + \sqrt[p]{b + c\sqrt[n]{d}}$, faas:

$$[(x - a)^p - b]^n = c^{n-1} \,.\, d\,[(x - a)^p + c - b],$$

som har $p \,.\, n$ Rødder bestemte ved oven anførte Udtryk for x.

Sættes $x = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$, erholdes følgende Ligning:

$$(b - ax^n)^n = ab\,(1 - x)\,(ax^n - bx)^{n-1},$$

hvis Rødder i Antal n^2 erholdes af Udtrykket for x ved at kombinere de n Værdier af $\sqrt[n]{b}$ med de n Værdier af $\sqrt[n]{a}$.

NÅGRA GEOMETRISKA SATSER.

(AF OL. OLSSON).

1.

a. Någonstädes inom en en plan, konvex polygon tager man en i planet fix punkt, låter sedan polygonen vrida sig et helt hvarf och på sådant sätt, att den fixa punkten ständigt förblir inom den samma, och så, att dess sidor dervid enveloppera slutna konturer utan singulära punkter. Betecknas längderna af polygo-

nens sidor med l_1, $l_2 \ldots l_n$ och af de envelopperade kurvorna med L_1, $L_2 \ldots L_n$ resp., så är

$$\Sigma l L = 4 \pi \Delta,$$

då Δ är polygonens yta.

Ty om vi från den fixa punkten som origo nedfälla mot polygonens sidor perpendiklarne $p_1\, p_2 \ldots p_\nu \ldots p_n$ och med φ_ν beteckna den vinkel, som p_ν bildar med grundrigtningen, så är [enl. Legendres' teorem]

$$dL_\nu = p_\nu\, d\varphi_\nu + dt_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

då t_ν betecknar den del af l_ν, som ligger emellan p_ν : s fotpunkt och l_ν : s tangeringspunkt med L_ν.

Genom att förlänga denna ekvation med l_ν och verkställa ledvis summation, erhålles följande formel:

$$\sum_1^n{}_\nu\, l_\nu\, dL_\nu = \sum_1^n{}_\nu\, l_\nu\, p_\nu\, d\varphi_\nu + \sum_1^n{}_\nu\, l_\nu\, dt_\nu.$$

Men emedan polygonen är af en gifven, bestämd form, så är

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 = \ldots = d\varphi_n$$
$$= d\varphi \text{ antag},$$

och eftersom figurens rörelse var bestämd på sådant sätt, att den fixa punkten altid skulle förblifva inom den samma, så är i hvarje läge af polygonen summan

$$\sum_1^n{}_\nu\, l_\nu\, p_\nu$$

konstant och $= 2\Delta$.

På grund häraf kan föregående summationslikhet skrifvas under formen

$$\sum_1^n{}_\nu\, l_\nu\, dL_\nu = 2\Delta\, d\varphi + \sum_1^n{}_\nu\, l_\nu\, dt_\nu \qquad (1)$$

och genom integration mellan gränserna φ och $\varphi + 2\pi$:

$$\sum_1^n{}_\nu \int_\varphi^{\varphi+2\pi} l_\nu\, dL_\nu = 2\Delta \int_\varphi^{\varphi+2\pi} d\varphi + \sum_1^n{}_\nu \int_\varphi^{\varphi+2\pi} l_\nu\, dt_\nu$$

eller slutligen

$$\sum_1^n{}_\nu\, l_\nu\, L_\nu = 4\pi\Delta,$$

enär $\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} l_\nu \, dt_\nu = 0$, alldenstund hvarje term i summan är $= 0$.

Ur denna slutformel kan man nu härleda följande:

Korrol. 1. Om man någonstädes inom en plan, konvex och liksidig månghörning tager en i planet fix punkt och sedan låter månghörningen vrida sig ett helt hvarf, men på sådant sätt, att den fixa punkten ständigt förblir inom den samma, så är summan af de utaf hans sidor envelopperade kurvornas längder i öfrigt oberoende af rörelsens beskaffenhet och $= 4\pi \frac{\Delta}{l}$, då Δ är polygonens yta och l längden af en af hans sidor.

Korrol. 2. Om man någonstädes inom en plan, konvex och regulär n-hörning tager en i planet fix punkt och sedan låter månghörningen vrida sig ett helt hvarf, men på sådant sätt, att den fixa punkten ständigt förblir inom den samma, så är summan af de utaf hans sidor envelopperade kurvornas längder i öfrigt oberoende af rörelsens beskaffenhet och $= n \times$ inskrifna cirkelns omkrets.

b. Mellan krökningsradierna $\varrho_1, \varrho_2 \cdots \varrho_n$ i motsvarande punkter på de resp. kurvorna $L_1, L_2 \ldots L_n$ kan man nu äfven framvisa åtskilliga rätt anmärkningsvärda relationer.

Om man nämligen låter månghörningen intaga tvenna konsekutiva lägen, så framgår omedelbart ur en figur, att

$$t_\nu = \frac{dp_\nu}{d\varphi} \tag{2}$$

och

$$\varrho_\nu = \frac{dL_\nu}{d\varphi}. \tag{3}$$

På grund af (1) och (3) följer nu, att

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu} l_\nu \varrho_\nu = 2\Delta + \sum_{1}^{n}{}_{\nu} l_\nu \frac{dt_\nu}{d\varphi}$$

eller med stöd af (2):

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu} l_\nu \varrho_\nu = 2\Delta + \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{d^2 p_\nu}{d\varphi^2}$$

Men emedan

$$\sum_1^n{}_\nu l_\nu \, p_\nu = 2\Delta,$$

blir

$$\sum_1^n{}_\nu l_\nu \frac{d^2 p_\nu}{d\varphi^2} = 0,$$

hvadan

$$\sum_1^n{}_\nu l_\nu \, \varrho_\nu = 2\Delta, \tag{4}$$

d. v. s.:

Summan $\sum_1^n{}_\nu l_\nu \, \varrho_\nu$ är i hvarje läge af månghörningen konstant.

Korrol. 1. Om månghörningen är liksidig, så är i hvarje läge af den samma $\sum_1^n{}_\nu \varrho_\nu = \frac{2\Delta}{l} =$ konst.

Korrol. 2. Om månghörningen är regulär, så är i hvarje läge af den samma $\sum_1^n{}_\nu \varrho_\nu = n \times$ den inskrifna cirkelns radie.

Ur likheten (4) framgår följande sats, som är en generalisation af Bobilliers' teorem:

Om vid en plan, konvex månghörnings rörelse ($n - 1$) af hans sidor ständigt tangera gifna cirklar, så tangerar också månghörningens n'te sida en cirkel.

2.

En determinerad rät linie rör sig, stödjande sina ändpunkter mot en gifven plan, konvex kontur. Att finna längden af enveloppen till en med den förra fast förenad rät linie i samma plan.

Låt pP vara den determinerade räta linien (längden $= l$), som stödjer sina ändpunkter p och P mot den gifna kurvan $pp'PP'$, och låt QRS vara den med den förra förenade räta linien. R betecknar tangeringspunkten mellan QRS och dess envelopp.

Wi vilja till en början antaga, att de begge linierna stå vinkelräta mot hvarandra. Förlängningen PQ af pP må hafva längden λ. $p'P'Q'$ och $Q'SR'$ äro konsekutiva lägen af linierna.

Om man nu först och främst fäster sig vid linien pP, så inser man, att jemväl den vid sin rörelse kommer att enveloppera en kurva C, helt och hållet belägen inom den gifna. Om man då med (A) betecknar den mellan dessa kurvor belägna ringformiga ytan, så är å ena sidan

$$(A) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} t^2 \, d\varphi, \tag{1}$$

då t är den del af pP, som ligger emellan P och tangeringspunkten mellan pP och C, och φ den vinkel, som pP bildar med grundrigtningen.

Men å andra sidan har man äfven

$$(A) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} (l - t)^2 \, d\varphi, \tag{2}$$

hvaraf genom jemförelse mellan (1) och (2):

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} t \, d\varphi = \pi l. \tag{3}$$

Men draga vi nu från Q och Q' perpendiklarne QT och $Q'T'$ mot resp. $p'P'Q'$ och QRS samt beteckna bågelementen QQ' och RSR' med dS och $dL_{\frac{\pi}{2}}$ samt sätta $\angle\, Q'QT = \alpha$ och $\angle\, Q'QS = \beta$, så blir

$$(t + \lambda)\, d\varphi = lim\, QT = dS \cos \alpha, \tag{4}$$

men vidare är

$$Q'R' - QR = Q'S + SR - QT' - T'S + RS$$

eller, om vi sätta $QR = \tau$,

$$d\tau = dL_{\frac{\pi}{2}} - dS \cos \beta. \tag{5}$$

Om vi nu jemföra ekvationerna (4) och (5) med iakttagande af, att i limes, d. ä. då punkterna Q och Q' äro i begrepp att sammanfalla, $\angle\, \alpha = \angle\, \beta$ (detta är en följd af vårt antagande, att $\angle\, PQR = \frac{\pi}{2}$), så erhålla vi likheten

$$dL_{\frac{\pi}{2}} = (t + \lambda)\, d\varphi + d\tau,$$

genom integration häraf mellan gränserna φ och $\varphi + 2\pi$ få vi

$$L_{\frac{\pi}{2}} = \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} t\, d\varphi + 2\pi\lambda + \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} d\tau,$$

eller på grund af (3):

$$L_{\frac{\pi}{2}} = \pi\,(l + 2\lambda), \qquad (6)$$

alldenstund

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} d\tau = 0.$$

Enveloppens längd i detta fall, d. v. s. då de räta linierna stå vinkelräta mot hvarandra, är altså $\pi\,(l + 2\lambda)$ och följaktligen oberoende af den gifna kurvans så väl form som storlek. I det speciela fall, då vi som gifven kurva väljer en cirkel, belyses på ett tydligt sätt denna märkliga egenskap hos enveloppen.

Detta är nu gällande i det enskilda fallet, att de begge linierna äro mot hvarandra vinkelräta. Bilda de deremot icke rät vinkel, utan en vinkel v hvilken som helst, eger följande relation rum:

$$L_v = \cos v\, L_0 + \sin v\, L_{\frac{\pi}{2}}, \qquad (7)$$

der L_0 = längden af pP:s envelopp, eller

$$L_v = pL_0 + q, \; (p,\, q \text{ konstanter.})$$

d. v. s.:

Om en determinerad, rät linie rör sig, stödjande sina ändpunkter mot en plan konvex kontur, och med henne är fast förenad en annan rät linie i samma plan, så är längden af den senares envelopp en liniär funktion af längden utaf den förras envelopp.

Emedan L_0 tydligen är funktion af den gifna kurvans form och längd, så är också i allmänhet detta fallet med L_v. Undantag härifrån ges blott, om $v = \frac{\pi}{2}$, ty då blir, som vi sett, $L_{\frac{\pi}{2}} = \pi\,(l + 2\lambda)$.

Härledningen af (7) verkställes på ett sätt, som är fullkomligt analogt med det af (6).

3.

En gifven kurvas tangenter skäras af en annan kurva under en vinkel, som är en viss funktion af tangenternas lutning mot en fast linie i planet. Att finna den senare kurvans längd.

Låt RFQ vara en tangent till den gifna kurvan, P betecknande tangeringspunkten och Q tangentens skärning med den andra kurvan, samt låt φ vara den vinkel, som tangenten bildar mot en fast linie, och $f(\varphi)$ skärningsvinkeln mellan den senara kurvan och tangenten.

Om då $P'RQ'$ är ett konsekutivt läge af tangenten, och man sätter $PQ = \tau$ samt från punkten Q' drager en perpendikel $Q'S$ mot PQ, så blir

$$P'Q' - PQ = P'R + RQ' + RP - RS - SQ$$

eller i limes:

$$d\tau = dL_0 - dL_{f(\varphi)} \cos f(\varphi), \tag{1}$$

då dL_0 och $dL_{f(\varphi)}$ beteckna differentialerna af de resp. kurvornas bågar.

Men om vi nu antaga, att den gifna kurvans ekvation, uttryckt i »intrinsika« koordinater,

är
$$L_0 = F(\varphi)$$

så kan (1) skrifvas under formen

$$\cos f(\varphi) \frac{dL_{f(\varphi)}}{d\varphi} - F'(\varphi) + \frac{d\tau}{d\varphi} = 0. \tag{2}$$

Och emedan vi dessutom hafva

$$\sin f(\varphi) \frac{dL_{f(\varphi)}}{d\varphi} = \lim \frac{Q'S}{\Delta\varphi} = \tau, \tag{3}$$

eller, efter differentiation:

$$\sin f(\varphi) \frac{d^2 L_{f(\varphi)}}{d\varphi^2} + f'(\varphi) \cos f(\varphi) \frac{dL_{f(\varphi)}}{d\varphi} - \frac{d\tau}{d\varphi} = 0, \tag{4}$$

så erhålla vi slutligen, då vi ur likheterna (2) och (4) eliminera $\frac{d\tau}{d\varphi}$, differential-ekvationen

$$\frac{d^2 L_{f(\varphi)}}{d\varphi^2} + \{1 + f'(\varphi)\} \cot g\, f(\varphi) \frac{dL_{f(\varphi)}}{d\varphi} = \frac{F'(\varphi)}{\sin f(\varphi)}. \tag{5}$$

Lösningen af denna liniära ekvation lemnar nu den sökta båglängden, uttryckt i vinkeln φ och ett par arbiträra konstanter.

Man finner nämligen, att

$$L_{f(\varphi)} = \int e^{-\int P d\varphi} \left(\int e^{\int P d\varphi} Q \, d\varphi + p \right) d\varphi + q, \tag{6}$$

der

$$P = (1 + f'(\varphi)) \, cotg \, f(\varphi),$$

$$Q = \frac{F'(\varphi)}{sin \, f(\varphi)},$$

samt p och q äro de begge integrationskonstanterne.

Eller, emedan

$$\int P \, d\varphi = l \, sin \, f(\varphi) + \int cotg \, f(\varphi) \, d\varphi,$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{f(\varphi)} = \\ \int e^{-\int cotg \, f(\varphi) \, d\varphi} \left(\int e^{\int cotg \, f(\varphi) \, d\varphi} F'(\varphi) \, d\varphi + p \right) \frac{d\varphi}{sin \, f(\varphi)} + q. \end{array} \right\} \tag{7}$$

Konstanterna p, q bestämmas i hvarje enskildt fall af φ's gränser samt på grund af det begyndelsesvärde, man tilldelar tangenten PQ.

Den relation, som eger rum mellan de mot gränserna φ_1 och φ_2 svarande tangenterna τ_1 och τ_2, erhålles omedelbarligen, om man differentierar ekvation (7) med afseende på φ och sedan jemför resultatet med (3).

Man får nämligen

$$\tau = e^{-\int cotg \, f(\varphi) \, d\varphi} \left(\int e^{\int cotg \, f(\varphi) \, d\varphi} F'(\varphi) \, d\varphi + p \right), \tag{8}$$

hvaraf

$$\tau_2 \, e^{-\int^{\varphi_2} cotg \, f(\varphi) \, d\varphi} - \tau_1 \, e^{-\int^{\varphi_1} cotg \, f(\varphi) \, d\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\int cotg \, f(\varphi) \, d\varphi} F'(\varphi) \, d\varphi. \tag{9}$$

I det fall, att $f(\varphi) = \alpha =$ konst., öfvergår L_α till en trajektoria till den gifna kurvans tangenter, och emedan ekvation (1) då är omedelbart integrabel, så blir den mot gränserna φ_1 och φ_2 svarande längden

$$L_\alpha^{(\varphi_2 - \varphi_1)} = sec \, \alpha \, (L_0^{(\varphi_2 - \varphi_1)} + \tau_1 - \tau_2),$$

eller på grund af (9):

$$L_{\alpha}^{(\varphi_2-\varphi_1)} = \sec\alpha\left[L_0^{(\varphi_2-\varphi_1)} + \tau_1\left(1-e^{-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{tg\,\alpha}}\right) - e^{-\frac{\varphi_2}{tg\,\alpha}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\frac{\varphi}{tg\,\alpha}} F'(\varphi)\,d\varphi\right] \quad (10)$$

Låta vi trajektorian utgå från origo, blir, alldenstund då $\tau_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $F(0) = 0$, dess längd

$$L_{\alpha}^{(\varphi-0)} = \frac{1}{\sin\alpha} e^{-\frac{\varphi}{tg\,\alpha}} \int_0^{\varphi} e^{\frac{\varphi}{tg\,\alpha}} F(\varphi)\,d\varphi.$$

För att ekvationen (10) skall gälla fordras dock, att $\alpha \lessgtr \frac{\pi}{2}$, ty i det fall att $\alpha = \frac{\pi}{2}$, blir $\cos\alpha = 0$, och likheten (1), ur hvilken (10) är deducerad, antager då ett helt annat utseende, nämligen

$$d\tau = dL_0.$$

Man ser häraf, att denna sats, ehuru en generalisation af det vanliga involutproblemet, dock icke i sig innefatter lösningen deraf, och detta på den grund, att den kvantitet, som deri sökes, nämligen $L_{\frac{\pi}{2}}$, här kommer att försvinna, emeden den ingår i en produkt vid sidan af en försvinnande faktor.

EN UDLEDELSE AF BETINGELSEN FOR, AT EN FLADE AF ANDEN ORDEN ER UDFOLDELIG.

(AF H. G. ZEUTHEN).

Skal Ligningen

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0 \quad (1)$$

fremstille en udfoldelig Flade, maa man af denne Ligning samt

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q = 0 \quad (2)$$

kunne udlede en Ligning mellem p og q. Dette maa vise sig ved, at z af sig selv gaar bort, naar man mellem disse 3 Ligninger borteliminerer x og y.

Behandlingen kan imidlertid ske under mere symmetrisk Form,

naar man bemærker, at ifølge Ligningerne (2) en Ligning alene mellem p og q vil være det samme som en homogen Ligning alene mellem $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$. Denne maa kunne udledes ved Elimination af x, y og z mellem disse Størrelsers Udtryk

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dx} = Ax + Fy + Ez + G,$$

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dy} = Fx + By + Dz + H,$$

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dz} = Ex + Dy + Cz + I,$$

samt Ligningen $f = 0$, som ved Subtraktion af disse Udtryk multiplicerede med x, y og z giver

$$-\frac{1}{2}x\frac{df}{dx} - \frac{1}{2}y\frac{df}{dy} - \frac{1}{2}z\frac{df}{dz} = Gx + Hy + Iz + K.$$

Eliminationen giver

$$\begin{vmatrix} A, & F, & E, & G - \frac{1}{2}\frac{df}{dx}, \\ F, & B, & D, & H - \frac{1}{2}\frac{df}{dy}, \\ E, & D, & C, & I - \frac{1}{2}\frac{df}{dz}, \\ G + \frac{1}{2}\frac{df}{dx}, & H + \frac{1}{2}\frac{df}{dy}, & I + \frac{1}{2}\frac{df}{dz}, & K. \end{vmatrix} = 0.$$

Ved Opløsningen af Determinanten i Addender faas

$$\begin{vmatrix} A & F & E & G \\ F & B & D & H \\ E & D & C & I \\ G & H & I & K \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A & F & E & G \\ F & B & D & H \\ E & D & C & I \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A & F & E & \frac{df}{dx} \\ F & B & D & \frac{df}{dy} \\ E & D & C & \frac{df}{dz} \\ G & H & I & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{4}\begin{vmatrix} A & F & E & \frac{df}{dx} \\ F & B & D & \frac{df}{dy} \\ E & D & C & \frac{df}{dz} \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Her ere de to mellemste Determinanter lige store og hæve hinanden, og det ses, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Ligningen bliver homogen i $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ er, at den første Determinant er $= 0$. Den tilhørende partielle Differentialligning af første Orden bliver

$$\begin{vmatrix} A & F & E & p \\ F & B & D & q \\ E & D & C & -1 \\ p & q & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

TALTHEORETISKE UNDERSØGELSER.

(AF A. S. BANG).

(Fortsat, se S. 80).

---

9. Da man for $a > 1$ har

$$F_{p^n}(a) = (a^{p^{n-1}})^{p-1} + (a^{p^{n-1}})^{p-2} + \dots a^{p^{n-1}} + 1 > p,$$

vil $F_{p^n}(a)$ indeholde mindst en Primfaktor af Formen $\alpha p^n + 1$. Her kan n være 1, naar undtages $p = 2$.

For at bevise, at $F_t(a)$ indeholder mindst en Primfaktor af Formen $\alpha t + 1$, maa man vise, at $F_t(a) > p_1$, idet $p_1 = \alpha p_2 p_3 \dots p_n + 1$.

Først kan det vises, at $F_t(a)$ eller $F_{p_1 p_2 \dots p_n}(b)$ er større end 1. Var dette ikke Tilfældet, havde man $F_{p_1 p_2 \dots p_n}(b) = 1$, hvoraf følger

$$(b^{p_1 p_2 \cdots p_n} - 1)(b^{p_1 p_2 \cdots p_{n-2}} - 1)(b^{p_1 p_2 \cdots p_{n-3} p_{n-1}} - 1) \dots = (b^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} - 1)(b^{p_1 p_2 \cdots p_{n-2} p_n} - 1) \dots$$

Udføres Multiplikationen og lægges 1 til paa begge Sider af Lighedstegnet, ville Leddene paa den ene Side ende med $\pm b$, paa den anden Side med $\pm b^{p_n}$, idet p_n er det mindste af Primtallene. Efter Division med b vil da det ene Udtryk være $\equiv 0$, medens det andet $\equiv \pm 1$ for Modulus b, hvilket er umuligt, saa at $F_t(a) > 1$.

Saafremt $F_t(a)$ ikke er delelig med p_1, som er den største

af Primfaktorerne i t, maa altsaa $F_t(a)$ indeholde mindst en Primfaktor af Formen $\alpha t + 1$.

Er derimod $p_1 = \alpha . p_2 p_3 \dots p_n + 1$, og tilfredsstiller den den i 8 stillede Betingelse, er p_1 Faktor i $F_t(a) = F_{p_1 p_2 \dots p_n}(b)$, saa at man for at bevise, at $F_t(a)$ indeholder mindst en Primfaktor af Formen $\alpha t + 1$, skal bevise, at $F_{p_1 p_2 \dots p_n}(b) > p_1$, naar $p_1 = \alpha p_2 p_3 \dots p_n + 1$.

Nu er $F_{p_1}(b) = b^{p_1 - 1} + b^{p_1 - 2} + \dots b + 1$, saa at

$$b^{p_1} > F_{p_1}(b) > b^{p_1 - 1}, \text{ hvoraf}$$

$$b^{p_1 p_2 - p_1 + 1} > F_{p_1 p_2}(b) = \frac{F_{p_1}(b^{p_2})}{F_p(b)} > b^{p_1 p_2 - p_1 - p_2} \text{ og}$$

$$b^{p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 + p_1 + p_2 + p_3} > F_{p_1 p_2 p_3}(b) > b^{p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 - 1}.$$

Det sidste Udtryk kan skrives

$$b^{p_1 (p_2 - 1)(p_3 - 1) + p_2 + p_3} > F_{p_1 p_2 p_3}(b) > b^{p_1 (p_2 - 1)(p_3 - 1) - p_1 p_2 - 1},$$

hvorpaa man faar

$$b^{p_1 (p_2 - 1)(p_3 - 1)(p_4 - 1) + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_3 p_4 + 1} > F_{p_1 p_2 p_2 p_4}(b) > b^{p_1 (p_2 - 1)(p_3 - 1)(p_4 - 1) - p_2 p_3 p_4 - p_2 - p_3 - p_4}.$$

Fortsættes saaledes, faar man

$$b^{p_1 (p_2 - 1) \dots (p_n - 1) + S_2} > F_{p_1 p_2 \dots p_n}(b) > b^{p_1 (p_2 - 1) \dots (p_n - 1) - S_1},$$

hvor $S_1 = p_2 . p_3 \dots p_n \left(1 + \frac{1}{p_2 p_3} + \frac{1}{p_2 p_4} + \dots \frac{1}{p_2 p_3 p_4 p_5} + \dots\right)$

og $\quad S_2 = p_2 . p_3 \dots p_n \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots \frac{1}{p_2 p_3 p_4} + \dots\right)$,

hvilket kan bevises exakt ved Induktion.

Var nu $F_t(a) = p_1$, maatte man have

$$p_1 > b^{p_1 (p_2 - 1) \dots (p_n - 1) - S_1}$$

eller $\quad p_1 - 1 \geqq b^{p_1 (p_2 - 1) \dots (p_n - 1) - S_1}$,

hvilket er umuligt, da man kan bevise, at

$$b^{p_1 (p_2 - 1) \dots (p_n - 1)} > (p_1 - 1) b^{2 S_1}.$$

Af Værdierne for S_1 og S_2 følger

$$S_1 + S_2 = (p_2 + 1)(p_3 + 1) \dots (p_n + 1)$$

og $\quad S_1 - S_2 = (p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_n - 1)$,

altsaa $\quad 2 S_1 = (p_2 + 1)(p_3 + 1) \dots + (p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots$,

hvilket tilligemed Indsættelse af Værdien af p_1 giver, at man skal have Uligheden

$$b^{\alpha p_2 p_3 \dots p_n (p_2-1)\dots(p_n-1)} > \alpha p_2 p_3 \dots p_n b^{(p_2+1)(p_3+1)\dots(p_n+1)}.$$

Vi antage, for at bevise, at denne Ulighed finder Sted, først at alle Primtallene ere ulige.

Da er $p_2 > 2$, hvoraf følger, da $b > 1$,

$$b^{p_2(p_2-1)} > p_2 b^{p_2+1},$$

og da $x^\alpha \geqq \alpha x$, faar man heraf

$$b^{\alpha p_2(p_2-1)} > \alpha p_2 b^{p_2+1},$$

hvilket giver

$$b^{\alpha p_2 p_3 (p_2-1)(p_3-1)} > p_3 (\alpha p_2 b^{p_2+1})^{p_3+1} >$$
$$\alpha p_2 p_3 b^{(p_2+1)(p_3+1)} \text{ o. s. v.;}$$

saa at man ikke kan have $F_{p_1 p_2 \dots p_n}(b) = p_1$, naar alle Primtallene ere ulige.

Indeholdes tillige Faktoren 2, kan man, idet man undtager Tilfældet $t = 6$, paavise, at

$$b^{2\alpha p_2 p_3 \dots p_n (p_2-1)\dots(p_n-1)} >$$
$$2\alpha p_2 p_3 \dots p_n\, b^{3\cdot(p_2+1)(p_3+1)\dots(p_n+1)}.$$

Der vil da blandt $p_2, p_3 \dots p_n$ findes mindst et p_2, som er lig eller større end 5, og da i saa Tilfælde

$$b^{2p_2(p_2-1)} > 2p_2 b^{3(p_2+1)},$$

idet nemlig

$$b^{2p_2(p_2-1)-3(p_2+1)} = b^{(2p_2+1)(p_2-3)} > 2p_2, \text{ da } p_2 > 3,$$

faar man heraf

$$b^{2\alpha p_2(p_2-1)} > 2\alpha p_2 b^{3(p_2+1)}$$

og som før

$$b^{2\alpha p_2 p_3 (p_2-1)(p_3-1)} > 2\alpha p_2 p_3 b^{3(p_2+1)(p_3+1)} \text{ o. s. v.,}$$

hvorved er bevist, at $F_{2p_1 p_2 \dots p_n}(b) > p_1$.

Tilbage haves Tilfældet $F_6(b)$, i hvilket Tilfælde $t = 2^n . 3^m$. Naar $F_6(b)$ ikke indeholder nogen Primfaktor af Formen $6\alpha + 1$, er $F_6(b) = b^2 - b + 1 = 3$, altsaa $b = 2$, og da

$$b = a^{2^{n-1} . 3^{m-1}}, \text{ bliver } n = 1,\ m = 1 \text{ og } a = 2.$$

Heraf følger, at naar t indeholder 2 eller flere Primfaktorer, vil $F_t(a)$, naar undtages $F_6(2)$, indeholde mindst en Primfaktor af Formen $\alpha t + 1$.

I Forbindelse med det foregaaende, giver dette, at naar $a > 1$ og $t > 2$ og man undtager $F_6(2)$, vil $F_t(a)$ indeholde mindst en Primfaktor af Formen $\alpha t + 1$.

Da endvidere $F_t(a)$ er en Faktor i $a^t - 1$, og

$a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ kun kan være en Potens af 2, naar saavel $a - 1$ som $a + 1$ ere det, hvilket giver $a = 3$, samt

$2^6 - 1$ er delelig med 7, faar man heraf, at

$a^t - 1$, naar a og t ere større end 1, samt man undtager $3^2 - 1$, indeholder mindst en Primfaktor af Formen $\alpha t + 1$.

10. Sætningerne kunne udvides, idet

$a^m - b^m$ og $a^n - b^n$ have største fælles Faktor $a^s - b^s$, naar s er st. f. F. for m og n, samt a primisk med b.

Saaledes vil $b^{\varphi(t)} \cdot F_t\left(\frac{a}{b}\right)$ foruden Primfaktorer af Formen $\alpha t + 1$ kun kunne indeholde p_1, naar p_1 gaar op i t og $p_1 - 1$ er delelig med de øvrige af t's Primfaktorer.

11. Ved Hjælp af Sætningen i 9 kan man bevise, at i en Differensrække, hvis første Led er 1, findes der uendelig mange Primtal.

At der altid findes Primtal, følger af, at $a^t - 1$, idet Differensen er t, vil indeholde mindst et Primtal af Formen $\alpha t + 1$.

Var nu Rækken af Primtal i Differensrækken endelig, bestaaende af Primtallene $p_1, p_2 \ldots p_n$, fik man, at Tallet $(p_1 . p_2 \ldots p_n)^t - 1$ maatte indeholde mindst et Primtal, forskjelligt fra $p_1, p_2 \ldots p_n$ hørende til Differensrækken, saa at Antagelsen er fejl og Rækken indeholder uendelig mange Primtal.

Det er saaledes lykkedes, elementært at bevise et specielt Tilfælde af den almindelige, af Lejeune-Dirichlet beviste Sætning:

I en Differensrække, hvis første Led og Differens ere primiske, findes uendelig mange Primtal, en Sætning, som tidligere kun er bevist ved Hjælp af Integralregning.

12. **Borttages de Primtal, som give Resten 1 for Divisor t, vil der være uendelig mange tilbage.**

Var Rækken endelig, bestaaende af Primtallene $p_1, p_2 \dots p_n$, skulde $t.p_1.p_2 \dots p_n + \alpha$, hvor α er mindre end og primisk med t, dog ikke 1, bestaa af lutter Primfaktorer, som give Resten 1 for Divisor t, hvilket er umuligt, da Produktet af Primfaktorerne i saa Fald maatte give Resten 1 for Divisor t, medens det giver Resten α.

Specielt faar man heraf, at Primtallene af hver af Formerne $3\alpha - 1$, $4\alpha - 1$ og $6\alpha - 1$ gaa i det Uendelige.

(Primtallene af Formen $3\alpha - 1$ ere paa Primtallet 2 nær de samme som Primtallene af Formen $6\alpha - 1$).

Borttages de Primtal, som give en af Resterne ± 1 for Divisor t, vil der være uendelig mange tilbage.

Beviset herfor er som før, kun maa α ikke være 0 eller ± 1, af hvilken Grund Sætningen ikke kan anvendes paa de før nævnte specielle Tilfælde, da der ikke var Primtal, som gav andre Rester end ± 1.

13. **Idet t gaar op i $a^n - 1$ og man borttager de Primtal, som give en af Resterne $1, a, a^2 \dots a^{n-1}$ for Divisor t, vil der være uendelig mange tilbage.**

Var Rækken endelig, bestaaende af $p_1, p_2 \dots p_n$, fik man, at $t.p_1 p_2 \dots p_n + \alpha$, hvor α er mindre end og primisk med t samt forskjellig fra $1, a, a^2 \dots a^{n-1}$, skulde bestaa af lutter Primfaktorer, som give en af Resterne $1, a, a^2 \dots a^{n-1}$ for Divisor t, men Produktet af saadanne Tal giver en Rest, som er en Potens af a, altsaa da $a^n = 1$, en af Resterne $1, a, a^2 \dots a^{n-1}$, hvilket er umuligt, da det giver Resten α.

Specielt faar man, at der findes uendelig mange Primtal, som give en af Resterne 3 eller 7 for Divisor 8.

Gaar t op i $a^n + 1$ og man borttager de Primtal, som give en af Resterne $\pm 1, \pm a, \pm a^2 \dots \pm a^{n-1}$ for Divisor t, vil der være uendelig mange tilbage.

Beviset er som før, kun maa α ikke være

$$\pm 1, \pm a, \pm a^2 \dots \pm a^{n-1}.$$

14. Det er bekjendt, at en Kongruens af n'te Grad

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \equiv 0 \ (mod\ p)$$

højst har n Rødder.

Saafremt den har Rødderne $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, kan man bevise, at

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n \equiv - a_1$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n \equiv a_2$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n \equiv - a_3$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \equiv + (-1)^n a_n.$$

Sætter man nemlig venstre Side identisk lig med

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) + f(x) \equiv 0 \ (mod\ p),$$

maa $f(x)$ højst være af Graden $n - 1$, men den tilfredsstilles af de n Rødder $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, og maa følgelig være identisk $\equiv 0$, det vil sige, dens Koefficienter maa alle være delelige med p, hvoraf Sætningen følger, da Koefficienterne til samme Led i begge Kongruenser maa være lige store.

Vi skulle nu give nogle Anvendelser af denne Sætning.

Er p et Primtal, vil Kongruensen $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (mod\ p)$ i Følge Fermats Sætning have de $p - 1$ Rødder $1, 2, 3 \ldots p - 1$, hvoraf følger de bekjendte Sætninger, at

Summen af Produkterne af n og n af de første $p - 1$ Tal, naar $n < p - 1$, er delelig med p, og at

Produktet af de første $p - 1$ Tal er kongruent med $- 1$ for Modulus p (Wilsons Sætning).

Er $2n + 1$ et Primtal, ville Tallene $1^2, 2^2, 3^2 \ldots n^2$ give forskjellige Rester for Divisor $2n + 1$, hvoraf følger, at Kongruensen $x^n - 1 \equiv 0 \ (mod\ 2n + 1)$ har Rødderne $1^2, 2^2 \ldots n^2$. Heraf kan man udlede Sætningerne:

Summen af Produkterne af r og r af de første n Kvadrattal, naar $r < n$, vil være delelig med $2n + 1$, samt

Produktet af de første n Kvadrattal vil være kongruent med ± 1, eftersom n lige eller ulige, for Modulus $2n + 1$. (Opgave 480 her i Tidsskriftet).

15. Den nævnte Sætning skal endvidere benyttes til Under-

søgelse af de Tal, som for Primtallet p høre til Exponenten n, det vil sige, for hvilke den n'te Potens er den laveste, hvortil de skulle opløftes for at give Resten 1 for Divisor p.

For at der overhovedet skal gives Tal, som gjøre $x^n \equiv 1$, maa n være en Divisor i $p - 1$.

Ere nu n's Divisorer n, n', n'' ..., da er

$$x^n - 1 = F_n(x) \,.\, F_{n'}(x) \,.\, F_{n''}(x) \ldots,$$

hvoraf følger, da ethvert Tal, som tilfredsstiller Kongruensen $F_{n^r}(x) \equiv 0$ tillige tilfredsstiller $x^{n^r} - 1 \equiv 0$, at de Tal, som høre til Exponenten n, maa være Rødder i $F_n(x) \equiv 0$, saa at der højst findes $\varphi(n)$ Rødder.

At der netop findes $\varphi(n)$ Rødder, følger af, at idet Divisorerne i $p - 1$, ere 1, α, $\beta \ldots p - 1$, da er

$$\varphi(1) + \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \ldots \varphi(p-1) = p - 1,$$

saa at, hvis der fandtes mindre end $\varphi(n)$ Rødder, da maatte $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ have mindre end $p - 1$ Rødder.

Da $F_n(x)$ ender med Leddet $+ 1$, idet Tæller og Nævner i Udtrykket for $F_n(x)$ begge ende paa plus eller minus 1, og Tallene $< p$ hørende til Exponenten n, ere Rødder i $F_n(x) \equiv 0$, er Produktet af de $\varphi(n)$ Rødder, som for Primtallet p høre til Exponenten n, kongruent med ± 1, eftersom $\varphi(n)$ ulige eller lige. Et specielt Tilfælde, nemlig for $n = p - 1$, er den bekjendte Sætning:

Produktet af de $\varphi(p-1)$ primitive Rødder til Primtallet p, er for $p > 3$ kongruent med $- 1$, for $p = 3$ kongruent med $+ 1$.

Gauss har desuden angivet Sætningen:

Summen af de primitive Rødder er kongruent med 0, naar $p-1$ er delelig med et Kvadrat, med ± 1 naar $p-1$ er Produktet af et lige eller ulige Antal Primfaktorer.

Denne gjælder mere almindelig for Tallene, hørende til Exponenten n, for hvilket Tilfælde den ogsaa her skal bevises. Da

$$F_n(x) = F_{p_1 p_2 \ldots p_n}\left(x^{p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_n^{\alpha_n - 1}}\right),$$
$$\text{idet } n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

vil $F_n(x)$ kun indeholde Potenser af x, hvis Exponenter ere delelige med $p_1^{\alpha_1-1}.p_2^{\alpha_2-1}\dots p_n^{\alpha_n-1}$, hvoraf følger, at naar kun en af Exponenterne $\alpha_1, \alpha_2\dots\alpha_n$ er større end 1, vil Koefficienten til Leddet $x^{\varphi(n)-1}$ i $F_n(x)$ være Nul, og da Summen af Tallene hørende til Exponenten n er kongruent med denne Koefficient med modsat Fortegn, vil Summen være kongruent med 0.

Ere $\alpha_1, \alpha_2\dots\alpha_n$ alle 1, faar man

$$F_n(x) = \frac{(x^{p_1p_2\dots p_n}-1)(x^{p_1p_2\dots p_{n-2}}-1)\dots}{(x^{p_1p_2\dots p_{n-1}}-1)\dots}.$$

Er nu n lige, bliver ved Udførelse af Multiplikationen i Tælleren og i Nævneren

$$F_n(x) = \frac{x^\alpha - x^{\alpha-1} - \dots}{x^\beta - x^{\beta-p_n} - \dots},$$

idet p_n er det mindste af Primtallene, saa at man faar, da $\alpha - \beta = \varphi(n)$,

$$F_n(x) = x^{\varphi(n)} - x^{\varphi(n)-1} + \dots,$$

saa at Summen af Rødderne er kongruent med $+1$. n ulige giver $F_n(x) = \dfrac{x^\alpha - x^{\alpha-p_n} - \dots}{x^\beta - x^{\beta-1} - \dots}$, hvoraf

$$F_n(x) = x^{\varphi(n)} + x^{\varphi(n)-1} + \dots,$$

saa at Summen af Rødderne er kongruent med -1.

LØSNING AF OPGAVERNE 321 OG 537.

321. De n Ligninger

$$\begin{aligned}
&ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d = 0,\\
&ax_2x_3 + bx_2 + cx_3 + d = 0,\\
&ax_3x_4 + bx_3 + cx_4 + d = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&ax_rx_{r+1} + bx_r + cx_{r+1} + d = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&ax_{n-1}x_n + bx_{n-1} + cx_n + d = 0,\\
&ax_nx_1 + bx_n + cx_1 + d = 0,
\end{aligned}$$

skulle løses med Hensyn til de n ubekjendte $x_1, x_2, \ldots x_r, \ldots x_n$. I hvilke Tilfælde bliver Løsningen ubestemt, og hvilke Relationer haves i saa Fald mellem de ubekjendte.

(T. N. Thiele).

Naar vi indføre nye ubekjendte ved Ligningerne

$$x_r + \frac{c}{a} = y_r,$$

idet vi udelukke Tilfældet $a = 0$, kunne de n forelagte Ligninger skrives under Formen

$$y_r\left(y_{r+1} + \frac{b-c}{a}\right) = \frac{bc - ad}{a^2}, \quad (r = 1, 2, \ldots n).$$

(Her og i det følgende forstaa vi ved $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ eller $y_{n+1}, y_{n+2} \ldots$ henholdsvis $x_1, x_2, \ldots$ og $y_1, y_2, \ldots$).

Ere nu α og β Rødderne i den 2den Grads Ligning

$$y^2 + \frac{b-c}{a} y = \frac{bc - ad}{a^2},$$

haves
$$y_r = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - y_{r+1}},$$

og ved for r at sætte $r+1, r+2, \ldots r+p$ og indsætte hvert af disse Udtryk i det foregaaende, findes

$$y_r = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta +} \frac{-\alpha\beta}{\alpha + \beta +} \cdots \frac{-\alpha\beta}{\alpha + \beta - y_{r+p}},$$

hvor Kjædebrøken har p Led. Ved Reduktion af denne finder man let de første Konvergenter

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \quad \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}, \quad \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}, \text{ o. s. v.,}$$

saa at den $(p-1)$'te Konvergent bliver

$$\frac{\alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-2}}{(\alpha, \beta)^{p-1}}$$ [1]),

idet $(\alpha, \beta)^{p-1}$ er en forkortet Betegnelse for $\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2}\beta + \ldots =$

[1]) Heraf fremgaar, at den uendelige Kjædebrøk $\frac{A}{B+} \frac{A}{B+} \frac{A}{B+} \cdots$ vil være konvergent, og have Værdien α, naar α er den Rod i Ligningen $x^2 + Bx = A$, hvis Modulus er mindst. Have Rødderne samme Modulus uden at være ligestore, vil Kjædebrøken oscillere.

$\frac{\alpha^p - \beta^p}{\alpha - \beta}$, og $(\alpha + \beta)(\alpha, \beta)^{p-1} - \alpha\beta(\alpha, \beta)^{p-2} = (\alpha, \beta)^p$. Man finder saaledes

$$y_r = \frac{(\alpha + \beta - y_{r+p})\,\alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-2} - \alpha\beta\,\alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-3}}{(\alpha + \beta - y_{r+p})(\alpha, \beta)^{p-1} - \alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-2}} = \frac{y_{r+p}\,\alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-2} - \alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-1}}{y_{r+p}(\alpha, \beta)^{p-1} - (\alpha, \beta)^p},$$

eller

$$(\alpha, \beta)^{p-1}\, y_r\, y_{r+p} - (\alpha, \beta)^p\, y_r - \alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-2}\, y_{r+p} + \alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-1} = 0,$$

som ogsaa kan skrives som

$$(\alpha, \beta)^{p-1}(y_r\, y_{r+p} - (\alpha + \beta)\, y_r + \alpha\beta) = \alpha\beta\,(\alpha, \beta)^{p-2}(y_{r+p} - y_r)$$
$(p = 2, 3\ldots)$.

Indføres heri $x_r + \frac{c}{a}$ for y_r og multipliceres med a, haves den almindelige Relation mellem to af de ubekjendte

$$\left.\begin{aligned}(\alpha, \beta)^{p-1}(ax_r x_{r+p} + bx_r + cx_{r+p} + d) = \\ \frac{ad - bc}{a}(\alpha, \beta)^{p-2}(x_{r+p} - x_r),\end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

hvor det maa erindres, at $\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{c - b \pm \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}}{2a}$. Tages heri $p = n$, findes til Bestemmelse af x_r Ligningen

$$(\alpha, \beta)^{n-1}(ax_r^2 + (b + c)\, x_r + d) = 0, \quad \text{(B)}$$

der under den Forudsætning, at $(\alpha, \beta)^{n-1}$ ikke er Nul, giver os de to Værdier af x_r

$$x_r = \frac{-(b + c) \pm \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}}{2a}.$$

Ved Indsættelse i Ligningerne ses, at øverste eller nederste Fortegn for alle Værdier af r svare til hverandre, saa at den almindelige Løsning af de forelagte Ligninger er givet ved

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \frac{-(b + c) \pm \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}}{2a}.$$

Er derimod $(\alpha, \beta)^{n-1} = 0$, hvilket kun kan forekomme, naar $\alpha : \beta$ er en n'te Rod af Enheden, denne selv dog undtagen, eller naar

$\alpha = \beta = 0$, vil Endeligningen (B) være identisk tilfredsstillet for alle Værdier af x_r, saa at x_r bliver ubestemt. I det første Tilfælde giver da (A) de almindelige Relationer mellem to af de ubekjendte x_r, hvoraf atter andre kunne udledes. Særlig mærkes det Tilfælde, hvor $\alpha : \beta$ ikke er nogen primitiv n'te Rod; denne maa da være en primitiv p'te Rod af Enheden, hvor p er en vis af n's Primfaktorer, og man finder da ifølge (A) $x_r = x_{r+p}$, og saaledes

$$x_1 = x_{p+1} = x_{2p+1} = \ldots, \; x_2 = x_{p+2} = x_{2p+2} = \ldots, \\ x_p = x_{2p} = x_{3p} = \ldots.$$

I det foregaaende er stiltiende gjort den Forudsætning, at ikke $\alpha = \beta = 0$, eller $b = c$, $b^2 = ad$; de givne Ligninger kunne i dette Tilfælde gives Formen

$$\left(x_r + \frac{b}{a}\right)\left(x_{r+1} + \frac{b}{a}\right) = 0,$$

hvoraf udledes for lige n

$$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = -\frac{b}{a}, \text{ og } x_2, x_4, \ldots \text{ ubestemte, eller}$$

$$x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = -\frac{b}{a}, \text{ og } x_1, x_3, \ldots \text{ ubestemte;}$$

for ulige n findes

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = -\frac{b}{a}.$$

Der staar nu kun tilbage at undersøge Tilfældet $a = 0$. Man kan da enten lade a aftage mod Nul, hvilket forudsætter, at man har bevist, at Rødderne i et System af Ligninger i Almindelighed ere kontinuerte Funktioner af Koefficienterne, eller man kan, som vi nu ville gjøre, behandle Ligningerne direkte.

Elimination af $p - 1$ ubekjendte mellem p af Ligningerne foretages ved at multiplicere den r'te med b^{p-1}, den $(r+1)$'te med $b^{p-2}(-c)$, den $(r+2)$'te med $b^{p-3}(-c)^2$, ... den $(r+p-1)$'te med $(-c)^{p-1}$ og addere, hvorved findes

$$b^p x_r - (-c)^p x_{r+p} + d\,(b, -c)^{p-1} = 0, \qquad (A')$$

eller for $p = n$

$$(b, -c)^{n-1}\,((b+c)\,x_r + d) = 0. \qquad (B')$$

Hvis ikke $(b, - c)^{n-1} = 0$, eller $b + c = 0$, findes den almindelige Løsning

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -\frac{d}{b+c}.$$

Er $b + c = 0$, medens d er forskjellig fra Nul, ere Ligningerne i Strid med hverandre; er tillige $d = 0$, ere alle de ubekjendte ubestemte.

$(b, - c)^{n-1}$ er Nul, naar $-\frac{b}{c}$ er en n'te Rod af Enheden (denne selv undtagen), og Diskussionen er ganske den samme som ovenfor, naar $\frac{\alpha}{\beta}$ ombyttes med $-\frac{b}{c}$.

Den ovenstaaende Behandling lader sig ogsaa gjennemføre ved det mere almindelige System af Ligninger

$$a_r x_r x_{r+1} + b_r x_r + c_r x_{r+1} + d_r = 0, \ (r = 1, 2, \ldots n),$$

som ved Substitutionen

$$x_r + \frac{c_r}{a_r} = y_r$$

bringes paa Formen

$$y_r (A_r + y_{r+1}) = B_r.$$

I Diskussionen optræde visse Determinanter, kjendte fra Kjædebrøkernes Theori.

(J. L. W. V. Jensen).

537. Find Summen af Rækken

$$x + x^2 - x^5 - x^7 + x^{12} + x^{15} - x^{22} - x^{26} + x^{35} + x^{40} - x^{51} - x^{57} + \ldots$$

o. s. v.

(Thiele).

Man bemærker øjeblikkelig, at følgende to Rækker, dannede af Exponenterne til hvert andet Led i den forelagte Potensrække,

1, 5, 12, 22, 35, 51, . . . og

2, 7, 15, 26, 40, 57, . . .

ere Differensrækker af 2den Orden med 2den Differens $= 3$. Man ser derfor, at de n'te Exponenter i første og anden Række henholdsvis ere

$$\frac{3}{2} n (n+1) - 2n = \frac{3}{2} n^2 - \frac{1}{2} n \text{ og}$$

$$\frac{3}{2} n (n+1) - n = \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n.$$

Betegnes den søgte Sum ved s, er altsaa

$$1 - s = \sum_0^{\infty} (-1)^n x^{\frac{3}{2} n^2 - \frac{1}{2} n} + \sum_1^{\infty} (-1)^n x^{\frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n} =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n x^{\frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n},$$

og da, som bekjendt, den Jacobi'ske Θ-Funktion er defineret ved

$$\Theta (q, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nzi},$$

findes

$$1 - s = \Theta \left(x^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{4i} lx \right), \quad s = 1 - \Theta \left(x^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{4i} lx \right).$$

Med nyere Funktionsbetegnelser er ϑ-Funktionen med Karakteristiken (0, 1) defineret ved

$$\vartheta_{01} (q, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nz} =$$

$$A \prod_0^{\infty} (1 - q^{2n+1} e^{2z}) (1 - q^{2n+1} e^{-2z}),$$

hvor

$$A = \prod_0^{\infty} (1 - q^{2(n+1)}).$$

Saaledes findes

$$1 - s = \vartheta_{01} \left(x^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{4} lx \right) = \prod_0^{\infty} (1 - x^{3(n+1)}) (1 - x^{3n+2}) (1 - x^{3n+1}),$$

$$s = 1 - \vartheta_{01} \left(x^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{4} lx \right) = 1 - \prod_0^{\infty} (1 - x^{n+1}).$$

Den forelagte Række er konvergent for $|x| < 1$; den frembyder tillige et Exempel paa en monogen Funktion, som ikke analytisk kan fortsættes ud over det nævnte Omraade, og er saaledes en virkelig »fonction à espace lacunaire«.

ϑ-Funktionerne ere, som bekjendt, ofte en Kilde til mærkelige taltheoretiske Sætninger, og denne Egenskab fornægter sig heller ikke i det foreliggende Tilfælde. Naar vi ved n_r betegne Antallet af de Maader, paa hvilke n kan opløses i en Sum af r forskjellige positive Addender, er

$$1 - s = \prod_1^\infty (1 - x^n) = 1 - \sum_1^\infty x^n (n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + \ldots),$$

og man finder derfor ved Sammenligning med den forelagte Række

$$n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + \ldots = (-1)^{m-1},$$

naar n er af Formen $\frac{1}{2} m (3m \pm 1)$, (m hel positiv). I alle andre Tilfælde er

$$n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + \ldots = 0.$$

F. Ex. er for $m = 3$ og $n = 15$, $15_1 = 1$, $15_2 = 7$, $15_3 = 12$, $15_4 = 6$, $15_5 = 1$, $15_6 = 0$ o. s. v. og

$$1 - 7 + 12 - 6 + 1 = (-1)^2.$$

(J. L. W. V. Jensen).

MINDRE MEDDELELSER.

I Opgave til Br. ved Underv. Nr. 48 har jeg forlangt bestemt Antallet af Tal op til en vis Grænse (specielt 10^n), som hverken ere delelige med 3 eller indeholde noget Ciffer 3. Paa given Foranledning skal jeg meddele Løsningen af denne Opgave for det Tilfælde, at Grænsen er et vilkaarligt Multiplum af 10, altsaa $10\,N$. Skrives Tallene op til $10\,N$ i Rækker paa 10 i hver, saa ses let, at alle de Rækker, som ikke helt udelades, fordi de indeholde et Ciffer 3, ville indeholde 4 Tal, som maa udsondres, enten som Multipla af 3 eller fordi 3 indgaar i dem. Hver af disse Rækker indeholder altsaa netop 6 Tal, som maa medtages, og der bliver altsaa kun at søge Antallet af Rækker. Er dette x, saa er det søgte Antal $= 6x$. Men x er det samme som Antallet af Tal $\leqq N$, som ikke indeholde Cifret 3. Opskrives alle disse efter deres Størrelse, saa ses de umiddelbart at svare til Tallene i et Nitalsystem, naar de Cifre, som ere > 3 alle formindskes med en Enhed, og x udtrykt i Nitalsystemet kan derfor umiddelbart aflæses af Cifrene i N. Er f. Ex. $N = 21498$ saa er $x =$ det Tal, som i Nitalsystemet skrives som $21387 = 7 + 8.9 + 3.9^2 + 1.9^3 + 2.9^4$.

Findes i N et Ciffer 3, saa maa man gaa til det nærmest lavere Tal, som ikke indeholder noget saadant. F. Ex. til $N = 21395$ svarer $x = 21288$ i Nitalsystemet. Heraf faas altsaa let Løsningen af Opgaven. Hvis Grænsen ikke er et Multiplum af 10, maa man særskilt undersøge de sidste Par Tal. (J. G.)

OPGAVER TIL LØSNING.

541. Naar t er Produktet af et ulige Antal Primtal, skal vises, at Summerne af de tredie, anden, første og nulte Potenser af Tallene mindre end og primiske med t forholde sig som de tilsvarende Summer af Tallene mindre end $\sqrt{t}$.

(A. S. Bang).

542. Man skal bestemme de ubekjendte $x_1, x_2, \ldots x_n$ af følgende n Ligninger.

$$\varphi(x_r, x_{r+1}) = 0, \; (r = 1, 2, \ldots n; \; x_{n+1} = x_1),$$

som antages at være irreduktible. Funktionen φ betegner en hel rational Funktion. (J. L. W. V. Jensen).

543. Man skal vise, at

$$\alpha_0 \cdot \frac{n^n}{[n]} + \alpha_1 \frac{(n-1)^n}{[n-1]} + \alpha_2 \frac{(n-2)^n}{[n-2]} + \ldots$$

altid er et helt Tal, naar n er positiv hel og

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1 - \frac{1}{1}, \; \alpha_2 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \; \alpha_3 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

o. s. v.

(Jul. Petersen).

544. Konstruer en Sexkant, hvis modstaaende Sider ere parallele, af Siderne. (A. S. Bang).

545. Givet 2 rette Linier og i hver et Punkt. Læg gjennem Punkterne en Cirkel, som af Linierne afskjære Korder, som have

a) given Sum eller Differens, b) givet Forhold, c) givet Produkt.

(A. S. Bang).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund, Lund.
A. Th. Daug, Upsala.
H. Gyldén, Stockholm.
Sophie Kowalevski, Stockholm.
G. Mittag-Leffler, Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes, Christiania.
O. J. Broch, Christiania.
S. Lie, Christiania.
L. Sylow, Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz, Kjøbenhavn.
J. Petersen, Kjøbenhavn.
H. G. Zeuthen, Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf, Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Side

Om Tverødder. Af *A. S. Guldberg* 97

Några geometriska Satser. Af *Ol. Olsson* 120

En Udledelse af Betingelsen for, at en Flade af anden Orden er udfoldelig. Af *H. G. Zeuthen* 128

Taltheoretiske Undersøgelser. (Forts.) Af *A. S. Bang* 130

Løsning af Opgaverne 321 og 537. 137

Mindre Meddelelser 143

Opgaver til Løsning 144

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

Fjerde Aargang.



KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1886.

SJETTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Sølvgade 90, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

Fig. 1.

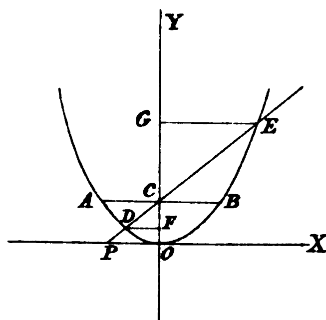


Fig. 2.

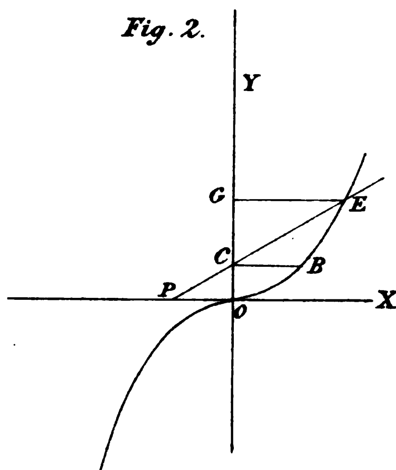


Fig. 3.

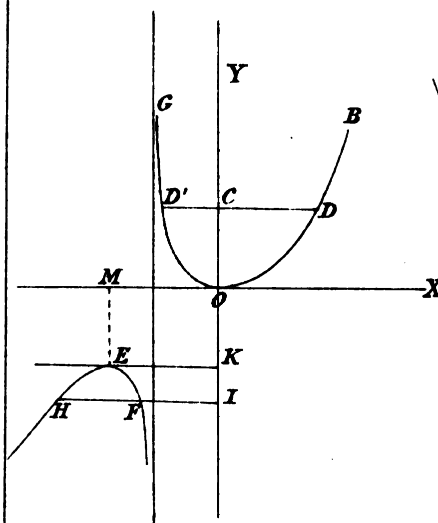


Fig. 4.

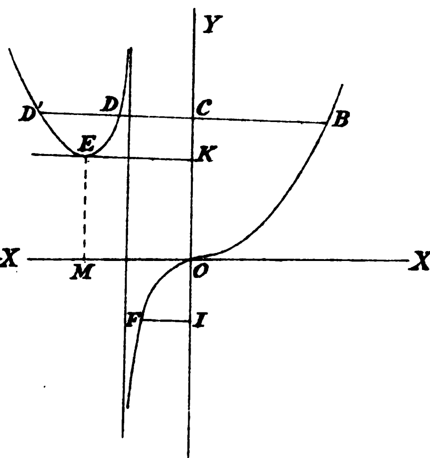
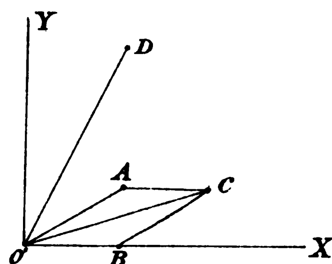


Fig. 5.



OM MOMENTSÆTNINGEN I STATIKEN[1]).

(AF H. G. ZEUTHEN).

Naar man i Statiken holder sig til Poinsot's udstrakte Anvendelse af Kraftpar (»Svingkræfter«), trænges derved let en meget vigtig og almindelig Sætning, nemlig Sætningen om Kræfters Momentsum med Hensyn til en Axe (eller et Punkt) noget tilbage. Medens den selv har en større Almindelighed og i sig indbefatter de vigtigste Sætninger om Kraftpar, kommer den let til at optræde som en Følge af disse.

Dette er f. Ex. Tilfældet i Jul. Petersens Statik, som jeg føler mig særdeles tilfreds med at følge ved mine Forelæsninger paa polyteknisk Læreanstalt. Jeg har, for ikke at berøve mine Tilhørere den Lettelse, som en trykt Bog yder, heller ikke i den her omtalte Henseende villet fjerne mig fra Bogen; men efterat være naaet til Momentsætningen har jeg dog fundet det rigtigt at fremhæve, hvorledes Momentsætningen — eller denne i Forening med den Sætning, som vi kunne kalde Projektionssætningen, om den end kan opfattes som Momentsætningen anvendt paa uendelig fjerne Axer — kan føre til en hurtigere og simplere Udledelse af de tidligere Sætninger om Kræfters Sammensætning. Man kan derved faa et Overblik over disse, som navnlig er nyttigt overfor den parallele Theori i Kinematiken om Bevægelsers Sammensætning [2]).

For at give dette Grundlag for Statiken sin rette Betydning, maa jeg begynde med direkte Begrundelser af Projektionssætningen og Momentsætningen. Ved disse og i det følgende forudsættes af Sætninger om Kræfters Sammensætning kun følgende to bekjendte: En Krafts Forskydning hen ad

[1]) Da Indholdet af denne Artikel ikke videnskabelig talt er nyt, tilføjer jeg ikke Citater. Jeg skal kun minde om, at det er Möbius, der i sin Statik først har indført og anvendt Begrebet Nullinier.

[2]) Jeg har tidligere benyttet det samme Grundlag i videre gaaende Forelæsninger over geometriske Anvendelser af Statik og Kinematik.

sin Kraftlinie, og Sammensætningen af to Kræfter, som virke paa samme Punkt, ved Kræfternes Parallelogram og den tilsvarende Opløsning. Naar der i det følgende tales om en Omdannelse af et System af Kræfter til et andet, antages denne Omdannelse at ske alene ved disse to Operationer.

1. Projektionssætningen. Da et Liniestykkes Projektion paa en anden Linie i Rummet ikke forandres ved, at Liniestykket forskydes hen ad sin Linie, og da Projektionen af en lukket Polygons Perimeter er Nul, vil Omdannelsen af et System af Kræfter ved de her nævnte to Operationer ingen Indflydelse have paa Summen af Kræfternes Projektioner paa en ret Linie. Altsaa, naar et System af Kræfter kan ombyttes med et andet, ere Summerne af deres Projektioner paa en og samme rette Linie indbyrdes lige store. Holde Kræfter hverandre i Ligevægt, maa Summen af deres Projektioner paa en hvilken som helst ret Linie være Nul.

2. Momentsætningen i Planen. En Kraft AB's Moment med Hensyn til et Punkt O er Kraftens Størrelse multipliceret med Punktets Afstand fra Kraftlinien. Er den positive Retning for en Normal paa Planen OAB given, kan man regne Momentet for positivt, naar Kraften AB ses som virkende fra venstre til højre af en Beskuer, som i Punktet O staar paa den positive Side af Planen. Momentet er det dobbelte af $\triangle\ OAB$, hvis denne regnes positiv, naar den ligger tilhøjre for den, der paa Planens positive Side gjennemløber Perimeteren i den ved Bogstaverne angivne Retning.

Det er indlysende, at Momentet ikke forandres ved, at Liniestykket AB forskydes henad sin Linie. Hvis fremdeles Kræfterne AB og AC ved Kræfternes Parallelogram sammensættes til AD, er

$$\triangle\ OAD = \triangle\ OAB + \triangle\ OAC,$$

fordi de have samme Grundlinie OA, og fordi Trekanternes Højder ere Projektionerne af AD, AB og AC paa en Linie vinkelret paa OA [1]). Omdannelser af et System af Kræfter i en Plan forandre

---

[1]) Dette bekjendte Bevis medtages ogsaa i Petersens Statik 59.

altsaa ikke Summen af deres Momenter med Hensyn til et fast Punkt i Planen.

3. Geometrisk Hjælpesætning for Momentsætningen i Rummet. Et Tetraeder med to modstaaende Kanter a og b, hvis lodrette Afstand er h, og som danne Vinklen v, er

$$\frac{1}{6} abh \sin v.$$

Denne Sætning kan bevises ved at betragte Tetraedret som en Prismatoide, hvis Grundflader falde i parallele Planer gjennem a og b, og begge blive Nul, medens Midtersnittet er et Parallelogram med Siderne $\frac{1}{2} a$ og $\frac{1}{2} b$ og Vinklen v. Den bevises ogsaa let ved at dele Tetraedret i to ved en Plan, som indeholder Kanten a og den korteste Afstand h. (Træffer denne korteste Afstand b's Forlængelse, faas en Differens).

4. Momentsætningen i Rummet. En Kraft AB's Moment med Hensyn til en Linie l er det samme som Momentet af dens Projektion paa en Plan vinkelret paa l med Hensyn til l's Skjæringspunkt O med denne Plan. Har l en positiv Retning, giver denne en positiv Side af Planen, hvorved Momentet ogsaa faar et Fortegn.

Afsætter man fra O, som er et vilkaarligt Punkt af l, i denne Linies positive Retning et Stykke OE lig Længdeenheden, bliver Kraften AB's Moment med Hensyn til Linien l det sexdobbelte af Tetraedret $OEAB$. Denne Sætning, som i øvrigt følger af Hjælpesætningen, bliver ogsaa rigtig i Henseende til Fortegnet, naar man regner Tetraedret for positivt eller negativt, eftersom Stykket fra A til B ses som gaaende fra venstre til højre eller omvendt af en Beskuer med Fødderne i O og Hovedet i E.

Man faar nu ved Udvidelse af Beviset i 2, at naar Kræfterne AB og AC sammensættes til AD, bliver Resultantens Moment med Hensyn til en vilkaarlig Linie l lig med Summen af Komposanternes Momenter. Er nemlig O l's Skjæringspunkt med Planen $ABCD$ er

$$\text{Tetr. } OEAD = \text{Tetr. } OEAB + \text{Tetr. } OEAC,$$

thi disse Tetraedre have samme Toppunkt E, og deres Grundflader tilfredsstille denne Ligning. Beviset kan ikke umiddelbart anvendes, naar l er parallel med Planen, men Sætningens Rigtighed ses da ved at projicere Kræfterne paa en Plan vinkelret paa l.

Idet Forskydning af en Kraft hen ad sin Kraftlinie ikke kan forandre dens Moment, ses det, at naar et System af Kræfter kan omdannes til et andet, ere Summerne af deres Momenter med Hensyn til en vilkaarlig ret Linie lige store. Som nødvendig Betingelse for Ligevægt for Kræfter faas, at Summen af deres Momenter med Hensyn til en vilkaarlig ret Linie skal være Nul.

Momentsætningen i Planen er indbefattet i den her beviste almindelige Momentsætning.

5. Plane Kræfters Sammensætning. For ikke blot at udlede nødvendige Ligevægtsbetingelser af Projektions- og Momentsætningen, men ogsaa finde tilstrækkelige Betingelser, maa man gjøre sig Rede for visse Reduktioner af et Kraftsystem, som altid ere mulige.

Kræfter i en Plan kunne alle opløses i to, af hvilke den ene gaar gjennem et Punkt A og den anden falder paa en Linie a, som ikke gaar gjennem A. Linien a maa dog — indtil man har vist parallele Kræfters Sammensætning og Opløsning — skjære alle de givne Kræfter, hvorefter den forlangte Opløsning foretages ved Kræfternes Parallelogram. De fundne Komposanter kunne dernæst sammensættes til en Kraft gjennem A og en Kraft beliggende i a.

Naar Summen af de givne Kræfters Momenter med Hensyn til A er Nul, maa den paa a liggende Kraft forsvinde. Punktet A er altsaa beliggende paa en Kraft, som kan træde i Stedet for alle de givne og kan kaldes deres Resultant. Den rette Linie, paa hvilken denne falder, bestemmes altsaa ved Ligningen

$$\Sigma Pp = 0,$$

hvor P betegner en vilkaarlig af de opgivne Kræfter, p et Punkts

Afstand fra dennes Kraftlinie, regnet positiv til højre for Kraftretningen. Derved faar man en bestemt Normalform

$$p = \cos\alpha \,.\, x + \sin\alpha \,.\, y + d$$

for Liniens Ligning.

Resultantens Størrelse R og Retning faar man ved at anvende Momentsætningen paa et vilkaarligt Punkt i Planen. Betegner r Punktets Afstand (med Fortegn) fra Resultanten, er

$$Rr = \Sigma Pp = ax + by + c = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\beta \,.\, x + \sin\beta \,.\, y + c)$$

eller idet $r = \cos\beta \,.\, x + \sin\beta \,.\, y + c$, $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Regnes denne Størrelse positiv, bliver Resultantens Normalform fuldkommen bestemt, Resultantens Retning, tilhøjre for hvilken Afstande skulde regnes positive, altsaa ogsaa.

Et Udtryk af første Grad $ax + by + c$ faar altsaa her en umiddelbar Betydning, nemlig Momentet af en Kraft, der er fuldkommen bestemt ved a, b og c, med Hensyn til Punktet (x, y).

Kun det specielle Tilfælde, hvor $a = 0$, $b = 0$, maa særlig undersøges. I dette Tilfælde har Kraften, eller de Kræfter, som den erstatter, samme Moment c med Hensyn til alle Punkter i Planen. Kraftlinien fjerner sig i det uendelige, og Kraftens Størrelse bliver Nul. Vi ville kalde den en Grænsekraft, og den karakteriseres ved sit Moment.

6. Parallele Kræfter. Da to Kræfter, som skjære hinanden, umiddelbart kunne sammensættes ved Kræfternes Parallelogram, skal Momentsætningen — uden det analytiske Apparat — her kun særlig benyttes til Sammensætning af to parallele Kræfter P og Q. Kaldes et vilkaarligt Punkts Afstande fra disse p og q og fra Resultanten R r, haves

$$Pp + Qq = Rr.$$

Resultantens Beliggenhed findes ved at sætte $r = 0$. Dens Størrelse kunde dernæst findes ved at anbringe Punktet paa en af de to Kræfter ($p = 0$, eller $q = 0$), men faas umiddelbart ved at fjerne det i det uendelige, hvorved $Lim\, \frac{p}{r} = Lim\, \frac{q}{r} = 1$, altsaa $R = P + Q$. Det samme ses ved Projektionssætningen.

Hvis $Q = - P$, bliver Resultanten en Grænsekraft, hvis Moment med Hensyn til alle Planens Punkter bliver

$$Rr = P(p - q),$$

hvor $p - q$ er Afstanden fra Kraften Q til Kraften P (regnet med Fortegn), og altsaa virkelig er uafhængig af Punktets Beliggenhed.

Omvendt kan man altid ombytte en Grænsekraft, eller Kræfter, hvis Resultant er en Grænsekraft, med to parallele, lige store og modsatte Kræfter. Som alt vist kunne de nemlig altid ombyttes med en Kraft gjennem et Punkt A og paa en Linie a, som ikke gaar gjennem A. Den første af disse kan ikke skjære den sidste, og, hvis de ere parallele, ikke være nogen anden end den lige store og modsatte, da man ellers fik en sædvanlig Resultant. Idet Punktet A og Linien a kunne vælges frit, ses det, at de to Kræfter kunne vælges paa uendelig mange Maader og kun tilfredsstille den ene Betingelse, at deres Momentsum med Hensyn til et vilkaarligt Punkt, som er den samme som Produktet af deres Størrelse og Afstand, har den Værdi, som karakteriserer Grænsekraften. De to Kræfter, som erstatte denne, siges at danne et Kraftpar og deres konstante Momentsum kaldes Kraftparrets Moment. Det ses, at et Kraftpar kan ombyttes med et andet i samme Plan, som har samme Moment.

De bekjendte Regler for Sammensætning af et vilkaarligt Antal parallele Kræfter ere umiddelbare Anvendelser af Moment- og Projektionssætningen. Disse vise ogsaa, at Sammensætningen af en sædvanlig Kraft og en Grænsekraft i samme Plan giver èn Parallelforskydning af den første.

7. Plane Kræfters Ligevægt. Naar Summerne af givne Kræfters Momenter med Hensyn til to Punkter i Planen A og B ere Nul, vil Kræfternes Resultant i Almindelighed falde paa AB, og Momentsummen med Hensyn til et Punkt C uden for AB være Resultantens Moment med Hensyn til C. Er nu ogsaa dette Moment Nul, maa der være Ligevægt.

Kræfter i en Plan holde hverandre i Ligevægt, naar Summerne af deres Momenter med Hensyn til Vinkelspidserne i en Trekant ere Nul.

At Momentsummen med Hensyn til A bliver Nul, viser, at Kræfterne kunne reduceres til en Kraft gjennem A. At denne sidste bliver Nul, kan vise sig ved, at Summen af dens Projektioner paa to Linier, der ikke ere parallele eller sammenfaldende, blive Nul. Altsaa: Kræfter i en Plan holde hverandre i Ligevægt, naar Summerne af deres Projektioner paa to rette Linier i Planen, der skjære hinanden, og af deres Momenter med Hensyn til et Punkt i Planen ere Nul.

8. Sammensætning af Kræfter i Rummet. En Kraft i Rummet P kan ombyttes med to, af hvilke den ene gaar gjennem et fast Punkt A, den anden falder i en fast Plan α. Dette sker alene ved Operationer i Planen AP. Er denne Plan specielt parallel med Planen α — hvad man for øvrigt, naar der kun er et endeligt Antal Kræfter, kan undgaa ved Valget af α — bliver den i α faldende Kraft en Grænsekraft, hvis Moment aabenbart er Momentet af P med Hensyn til Perpendikulæren fra A paa α.

Ved endvidere at sammensætte Kræfter gjennem A og ligesaa i α kan et System af Kræfter i Rummet ombyttes med to Kræfter, af hvilke den ene gaar gjennem A, den anden ligger i α.

Kraften gjennem A kan endvidere opløses i en Kraft, virkende efter en vilkaarlig ret Linie l gjennem A, og en, som skjærer Kraften i α, (eller hvis denne er en Grænsekraft, er parallel med α) Denne sidste kan sammensættes med Kraften i α til en Kraft, virkende efter en Linie m. Da l var en vilkaarlig Linie gjennem det vilkaarlige Punkt A, kunne Kræfter i Rummet ombyttes med to, af hvilke den ene virker efter en fuldkommen vilkaarlig Linie l. Den Linie m, hvorefter den anden Kraft virker, kaldes dennes konjugerede Linie.

Hvis Linierne l og m skjære hinanden, kunne de efter dem virkende Kræfter ombyttes med en enkelt Resultant. Den konjugerede Linie m til l kan da ombyttes med enhver anden Linie i det ved l og m bestemte Liniebundt, og den enkelte Resultant selv bliver konjugeret til alle Linier i Rummet.

Naar der er Ligevægt, kunne hvilke som helst to Linier betragtes som konjugerede.

I alle andre Tilfælde maa l og m være to Linier, som ikke skjære hinanden, og det vil i 9 vise sig, at den ene fuldstændig bestemmer den anden.

9. Nullinier. En Linie, med Hensyn til hvilken et System af Kræfter har Momentsummen Nul, kaldes en Nullinie for dette System. Enhver Linie, der skjærer to konjugerede Linier, maa være en Nullinie, og omvendt maa en Nullinie, der skjærer den ene af to konjugerede Linier, ogsaa skjære den anden. Heraf følger, at naar der hverken er Ligevægt eller en enkelt Resultant, maa alle Nullinier gjennem samme Punkt tillige ligge i samme Plan. Denne bestemmes nemlig ved Punktet og den konjugerede Linie til en vilkaarlig Linie gjennem dette. Paa samme Maade indses det, at alle Nullinier i samme Plan gaa gjennem samme Punkt.

At en Linie l nu ikke foruden m kan have en anden konjugeret Linie, ses af, at denne, naar A og B ere vilkaarlige Punkter af l, maatte ligge i Planerne Am og Bm, hvilke ikke falde sammen.

10. Ligevægtsbetingelser. Naar der gjennem et Punkt A gaar tre Nullinier, som ikke ligge i samme Plan, maa Kraftsystemet kunne reduceres til en Kraft gjennem A. Denne sidste vil blive Nul, naar dens Projektioner paa de 3 Nullinier ere Nul, og ligeledes, naar dens Momenter med Hensyn til de tre Sider i en Trekant, hvis Plan α ikke gaar gjennem A ere Nul. (Dette sidste alene vilde være Betingelse for, at Kraftsystemet kan reduceres til en Kraft i α). Som simple Former for de tilstrækkelige Ligevægtsbetingelser faas da:

Et System af Kræfter er i Ligevægt, naar Summerne af Projektionerne paa de tre Kanter i et tresidet Hjørne og af Momenterne med Hensyn til disse Linier ere Nul; ligeledes naar Summerne af Momenterne med Hensyn til Kanterne i et Tetraeder ere Nul.

Disse tilstrækkelige Ligevægtsbetingelser give ogsaa Betingel-

serne for, at et System af Kræfter kan træde i Stedet for et andet. Der maa nemlig være Ligevægt mellem det ene System og Kræfter lige store med og modsatte dem i det andet.

11. Anvendelse paa Kraftpars Sammensætning. En Grænsekrafts eller et Kraftpars Moment med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i deres Plan er tillige Moment med Hensyn til en vilkaarlig Axe vinkelret paa Planen. Det afsættes paa en saadan Linie, idet Retningen bestemmes ved de i 4 givne Regler (ɔ: paa sædvanlig Maade). Dette Liniestykke kaldes Kraftparrets Axe. Kraftparrets Momentsum med Hensyn til en vilkaarlig ret Linie l i Rummet er Axens Projektion paa denne, hvad man kan se ved at omdanne Kraftparret saaledes, at de Kræfter, der sammensætte det, blive parallele med den af Linien l og Axen, som man kan lade skjære denne, bestemte Plan.

Nu ses det, at Sammensætning af to Kraftpar give et tredie, hvis Axe er tredie Side i en Trekant, hvis to andre Sider ere Axer for de givne Kraftpar. Da Projektionen af denne tredie Side paa en vilkaarlig ret Linie er lig Summen af de to andre Siders Projektioner, ses det nemlig, at det nye Kraftpar giver samme Momentsum med Hensyn til en vilkaarlig ret Linie som de to givne tilsammen.

12. Analytisk Bestemmelse af Nullinier. For Planens Vedkommende bestemtes Resultanten analytisk som geometrisk Sted for de Punkter, for hvilke Momentsummen er Nul. Et Kraftsystem i Rummet karakteriseres paa lignende Maade ved sine Nullinier. Til disses analytiske Bestemmelse behøves et Liniekoordinatsystem i Rummet. Er man ikke forud i Besiddelse af et saadant, kan man omvendt danne det ved Anvendelse af de her meddelte statiske Betragtninger. Denne Vej — som dog ogsaa er fulgt af andre — er jeg gaaet i en Afhandling i 1ste Bind af Mathematische Annalen.

13. Chasles' Sætning. Som endnu en Anvendelse af Momentsætningen skal her endnu kun tilføjes et Bevis for den bekjendte Sætning, at naar man paa forskjellig Maade ombytter et Kraftsystem med to Kræfter, vil det Tetraeder, som har disse til

modstaaende Kanter, have et konstant Volumen. Betegner p og q et saadant Par, r og s et andet, skal man altsaa have

$$(pq) = (rs),$$

idet (ab) i Almindelighed betegner Volumen af et Tetraeder med to Liniestykker i Rummet til modstaaende Kanter. Idet Liniestykkerne have en bestemt Retning, faar Tetraedret ogsaa et Fortegn, og det ses let, at $(ab) = (ba)$.

Vælges a vilkaarlig, giver Momentsætningen

$$(ap) + (aq) = (ar) + (as).$$

Sættes efterhaanden p og q for a, faas, idet $(pp) = 0$ o. s. v.

$$(pq) = (pr) + (ps) = (qr) + (qs) = \frac{1}{2}((pr) + (ps) + (qr) + (qs)),$$

som paa Grund af Symmetrien bliver $= (rs)$.

Anmærkning. Vil man overføre den her beskrevne Theori paa Kinematiken, er det som bekjendt kun Udgangspunktet, der bliver noget forskjelligt. En Rotations Moment med Hensyn til en Linie, bliver Komposanten efter denne Linie af den Hastighed, som et vilkaarligt af dens Punkter faar ved Rotationen. Dette ses let ved at fremstille Momentet ved et Tetraeder som i 4. Momentsætningen bliver derved simplere end Sætningen om Sammensætningen af to Rotationer med Axer i samme Plan, og det bliver derved naturligst at udlede denne af hin. (Se min Artikel i dette Tidsskrifts Aargang 1883, S. 156—63, særlig S. 161).

NOGLE BEMÆRKNINGER OM EN KLASSE KOMBINATORISKE OPGAVER.

(AF S. HERTZSPRUNG).

Flere her i Tidsskriftet fremsatte Opgaver, hvori der forlanges Antallet af Maader, paa hvilke en given Mængde Elementer kan grupperes, naar visse Betingelser skulle opfyldes, lade sig løse paa en ensartet Maade ved Hjælp af Differenser af højere Orden. Denne Fremgangsmaade giver tillige simple Udtryk for visse Gjennemsnitsantal og disses Middelafvigelse.

Hvad jeg hermed mener vil det være lettest at oplyse under Exemplets Form. Jeg vil hertil vælge Professor Thieles Opgaver 300 og 301, der i Forening kunne udtrykkes omtrent saaledes:

Et Selskab af n Personer, hvoriblandt k Ægtepar, tage Plads ifølge Lodtrækning rundt om et Bord. Hvor mange Grupperinger ere mulige, naar ingen Mand maa sidde ved Siden af sin Kone? Hvor mange Mænd komme i en Gruppering gjennemsnitlig til at sidde ved Siden af deres Koner? Og hvor stor er Middelafvigelsen til dette Gjennemsnit?

Lad os kalde de gifte Mænd A, B, $C \dots K$ og deres Koner henholdsvis a, b, $c \dots k$. $H:h$ skal betyde, at Manden H sidder adskilt fra sin Kone h, Hh derimod, at de sidde sammen. Symbolet

$$A:a,\ B:b,\ C:c,\ Dd,\ Ee$$

skal betegne Antallet af mulige Grupperinger, som tilfredsstille den Fordring, at A sidder adskilt fra a, B fra b, C fra c, medens D sidder ved Siden d og E ved e. Symbolet for alle andre lignende Antal vil forstaas heraf uden videre Forklaring.

Der er nu først følgende simple Iagttagelse at gjøre. Man maa have

$$\left.\begin{array}{c} A:a,\ B:b,\ C:c,\ Dd,\ Ee\ -\ A:a,\ B:b,\ C:c,\ Dd,\ Ee,\ Ff = \\ A:a,\ B:b,\ C:c,\ Dd,\ Ee,\ F:f. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Thi Betydningen heraf er kun, at man af Minuenden, i hvis Grupper F og f kunne sidde paa hvilke som helst Pladser, borttager dem, hvori de sidde ved Siden af hinanden, og altsaa faar de Grupper tilbage, hvori de sidde adskilte.

Dersom man nu i en Differens som denne (og i alle andre tilsvarende) kan ombytte D og d med F og f, altsaa dersom man har

$$A:a,\ B:b,\ C:c,\ Dd,\ Ee,\ F:f = A:a,\ B:b,\ C:c,\ D:d,\ Ee,\ Ff, \quad (2)$$

hvilken Ombytning i denne specielle Opgave øjensynlig er tilstedelig, vil følgende Skema, hvori Δ_0 betegner $k+1$ Funktionsværdier, Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \dots \Delta_k$ deres Differenser[1]), være rigtigt:

---

[1]) Det er bekvemmest her mod Sædvane at skrive Rækkerne op med aftagende Led ovenfra nedefter. Til Gjengjæld maa saa Differenser af aftagende Led regnes positive, af voxende negative.

Δ_0	Δ_1	Δ_2	
— —			
Aa	$A:a$	$A:a, B:b$	
Aa, Bb	$A:a, Bb$	$A:a, B:b, Cc$	
Aa, Bb, Cc	$A:a, Bb, Cc$	$A:a, B:b, Cc, Dd,$	....
Aa, Bb, Cc, Dd	$A:a, Bb, Cc, Dd$	$A:a, B:b, Cc, Dd, Ee$	....
....	....	.....	
....	....	$A:a, B:b, Cc, Dd \ldots Ii$	
$Aa, Bb, \ldots. Ii$	$A:a, Bb, Cc \ldots Ii$	$A:a, B:b, Cc, Dd \ldots Ii, Kk$	
$Aa, Bb, \ldots. Ii, Kk$	$A:a, Bb, Cc \ldots Ii, Kk$		

	Δ_{k-1}	Δ_k
....	$A:a, B:b, C:c \ldots I:i$	$A:a, B:b, C:c \ldots I:i, K:k.$
....	$A:a, B:b, C:c \ldots I:i, Kk$	

(3)

Heri vil altsaa Δ_k angive det søgte Antal af Grupperinger, hvori enhver af Ægtemændene sidder adskilt fra sin Kone.

Man ser, at øverste Δ_0, som er betegnet med — —, angiver Antallet af alle mulige Grupperinger uden specielle Betingelser, at øverste Δ_h angiver Antallet af Grupperinger, hvori de h bestemte Mænd A, B, $C \ldots H$ sidde adskilte fra deres Koner, uden at der er fastsat Betingelser for Placeringen af de andre, medens nederste Δ_h giver Antallet, naar Mændene A, B, $C \ldots H$ sidde adskilte fra deres Koner, og hver af de øvrige Mænd skal sidde ved Siden af sin Kone.

Man ser endvidere, hvorledes det strax ved den anden Δ bliver nødvendigt, at den ved (2) omtalte Bytning er tilladelig, idet man umiddelbart kun har

$$Aa - Aa, Bb = Aa, B:b$$

i Stedet for Skemaets $A:a, Bb$.

Kaldes Størrelserne Δ_0 ovenfra nedefter for w_k, w_{k-1}, $w_{k-2} \ldots w_0$, saa at w_{k-h} betegner Antallet af de Grupperinger, i hvilke de bestemte Mænd A, B, $C \ldots H$ sidde ved Siden af deres Koner, medens alle øvrige Personer kunne sidde paa vilkaarlige Pladser, bliver altsaa først efter den sædvanlige Differensformel

$$\Delta_k = w_k - \frac{k}{1} w_{k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2} w_{k-2} - \dots + (-1)^k w_0. \quad (4)$$

Betegne vi dernæst den nederste Række Differenser i (3) med δ_0, δ_1, $\delta_2 \dots \delta_k$, saa at specielt $\delta_k = \Delta_k$, saa vil Antallet af Grupperinger, hvori h hvilkesomhelst af Mændene sidde adskilte fra deres Koner, medens hver af de øvrige Mænd sidder ved Siden af sin Kone, være

$$C_{k,h}\,\delta_h,$$

og følgelig maa det hele mulige Antal Grupperinger være

$$\delta_0 + C_{k,1}\delta_1 + C_{k,2}\delta_2 + \dots$$
$$+ C_{k,k-2}\delta_{k-2} + C_{k,k-1}\delta_{k-1} + C_{k,k}\delta_k$$

eller

$$\left.\begin{aligned} w_k = w_0 + \frac{k}{1}\delta_1 + \frac{k(k-1)}{1.2}\delta_2 + \dots \\ + \frac{k(k-1)}{1.2}\delta_{k-2} + \frac{k}{1}\delta_{k-1} + \delta_k. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Denne Ligning er ogsaa korrekt, da den kun angiver den almindelige Summationsformel, som udtrykker w_k ved Differenserne δ.

Multipliceres nu Leddene i højre Side af (5) med henholdsvis A_0, A_1, $A_2 \dots A_k$, om hvilke Størrelser nærmere senere, og sættes, idet Leddene tages i omvendt Orden,

$$\left.\begin{aligned} Qw_k = A_k\delta_k + A_{k-1}\frac{k}{1}\delta_{k-1} + \\ A_{k-2}\frac{k(k-1)}{1.2}\delta_{k-2} + \dots + A_0 w_0, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

saa kunne, eftersom δ_h er den h'de Differens af Størrelserne w_h, $w_{h-1} \dots w_0$, Leddene i højre Side skrives

$$\left.\begin{aligned} A_k\delta_k &= A_k w_k - A_k\frac{k}{1}w_{k-1} + A_k\frac{k(k-1)}{1.2}w_{k-2} - \dots \\ A_{k-1}\frac{k}{1}\delta_{k-1} &= A_{k-1}\frac{k}{1}w_{k-1} - A_{k-1}\frac{k}{1}\cdot\frac{k-1}{1}w_{k-2} + \dots \\ A_{k-2}\frac{k(k-1)}{1.2}\delta_{k-2} &= A_{k-2}\frac{k(k-1)}{1.2}w_{k-2} - \dots \end{aligned}\right\} (7)$$

o. s. v., idet hver af Rækkerne ender med det Led, som indeholder w_0.

Summeres Ligningerne (7), saa at der paa venstre Side kommer Qw_k, vil, hvad man med lidt Opmærksomhed ser, Koefficienten for w_{k-h} paa højre Side blive

$$(-1)^h C_{k,h}\left(A_k - \frac{h}{1} A_{k-1} + \frac{h(h-1)}{1.2} A_{k-2} - \ldots + (-1)^h A_{k-h}\right).$$

Da Parenthesen her er den h'de Differens af A_k, $A_{k-1} \ldots A_{k-h}$, maa, hvis Størrelserne A danne en Differensrække af lavere Orden end h, Parenthesen blive Nul.

Men dersom man nu sætter $A_k = 0$, $A_{k-1} = 1$, $A_{k-2} = 2$, $\ldots A_0 = k$, viser (6), at Q bliver det gjennemsnitlige Antal af Mænd, der i en Gruppering komme til at sidde ved Siden af deres Koner. Kaldes dette Gjennemsnit G og bemærkes, at A'erne her danne en Differensrække af første Orden, saa at i (7) alle Led efter w_{k-1} bortfalde, bliver der af (7) kun tilbage

$$Gw_k = kw_{k-1} \text{ eller}$$

$$G = k\frac{w_{k-1}}{w_k}. \qquad (8)$$

Og dersom man sætter $A_k = (0 - q)^2$, $A_{k-1} = (1 - q)^2$, $A_{k-2} = (2 - q)^2 \ldots A_0 = (k - q)^2$, bliver i (6) Q = Kvadratet af Middelafvigelsen paa et antaget Antal q af Mænd, der i en Gruppering komme til at sidde ved Siden af deres Koner. Da A'erne her danne en Differensrække af 2den Orden, faar man, naar Middelafvigelsen kaldes μ_q, (7) indskrænket til

$$\begin{aligned}\mu_q^2 w_0 = q^2 w_k - q^2 k w_{k-1} \quad & + q^2 \frac{k(k-1)}{2} w_{k-2}, \\ + (1-q)^2 k w_{k-1} & - (1-q)^2 k(k-1) w_{k-2}, \\ & + (2-q)^2 \frac{k(k-1)}{2} w_{k-2},\end{aligned}$$

hvoraf

$$\mu_q^2 w_0 = q^2 w_k + (1 - 2q) k w_{k-1} + k(k-1) w_{k-2}. \qquad (9)$$

Specielt faas heraf, naar (8) erindres,

$$\mu_G^2 = G - G^2 + k(k-1)\frac{w_{k-2}}{w_k}. \qquad (10)$$

Da n Personer kunne tage Plads om et Bord paa $[n - 1]$ Maader, naar man ikke regner de Grupperinger, der faas af hinanden ved Forskydning af hele Kredsen, som forskjellige, og da to Personer, som skulle sidde sammen, kunne betragtes som en Person, dog at de to ved at bytte Plads fordoble Antallet af Grupperingerne, bliver i Prof. Thieles Opgave

$$\begin{aligned} w_k &= [n-1], \\ w_{k-1} &= 2\,[n-2], \\ w_{k-2} &= 2^2\,[n-3], \\ &\vdots \\ w_0 &= 2^k\,[n-k-1]. \end{aligned}$$

Heraf faas ifølge (4)

$$\Delta_k = [n-1] - \frac{k}{1}\,2\,[n-2] + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\,2^2\,[n-3] - \dots + (-1)^k\,2^k\,[n-k-1$$

og ifølge (8) og (10)

$$G = \frac{2k}{n-1},$$

$$\mu_G^2 = \frac{2k}{n-1}\left(1 - \frac{2k}{n-1} + \frac{2(k-1)}{n-2}\right),$$

stemmende med de Resultater, hvortil Dr. Gram er kommen ad anden Vej (Aargang 1876, S. 92).

Af de søgte Størrelser kunde i øvrigt G findes simpelt saaledes: Sandsynligheden for, at af de to Personer, der i en Gruppering komme til at sidde ved Siden af en bestemt Mand, den ene er hans Kone, er $\frac{C_{n-2,1}}{C_{n-1,2}} = \frac{2}{n-1}$, hvilket, da der er k Ægtepar, giver $G = k\frac{2}{n-1}$. Tilsvarende Betragtning kan gjøres i de Opgaver, der nævnes i det følgende.

Formlerne (4)—(10) ere anvendelige paa enhver Opgave, der lader sig passe ind i et Skema som (3). Dette er ofte Tilfældet med Opgaver, hvori der søges Antallet af Grupperingsmaader, som opfylde k ensartede Betingelser (i forrige Opgave Betingelserne A

skal sidde adskilt fra a, B fra b, ... K fra k). w_k vil da være Antallet af alle mulige Grupperingsmaader, w_{k-h} Antallet af Grupperingsmaader, der tilfredsstille den Fordring, at h bestemte Betingelser af de k skulle være brudte. I Skemaets Differenser, som maa læses paa den til hver Opgave svarende Maade, maa den ved (2) omtalte Ombytning være tilladelig [1]). Er alt dette i Orden, giver Δ_k det søgte Antal, G Gjennemsnitsantallet af brudte Betingelser i en Gruppering (eller, om man hellere vil, $k - G$ Gjennemsnitsantallet af opfyldte Betingelser i en Gruppering) og endelig μ_G dette Gjennemsnitsantals Middelafvigelse. — Ogsaa Opgaver, i hvilke der kun forlanges Gjennemsnitsantal, lade sig undertiden bringe paa denne Form.

Det, der vindes ved Fremgangsmaaden, er, at Opgaven reduceres til Bestemmelsen af Størrelserne w, hvad der i Reglen er en betydelig Simplifikation.

Jeg skal nu tillade mig at vise et Par Anvendelser.

Opg. 402. Find i en Determinant Antallet af Led, som ikke indeholde Elementer af Diagonalrækken.

Ere Elementerne af Diagonalrækken k i Tallet, nemlig A, B, C, ... K, saa bestaa de k Betingelser i, at A ikke, B ikke, ... K ikke maa findes i de Led, hvis Antal søges. Altsaa skal w_{k-h}, som betyder Antallet af Led, hvori h bestemte Betingelser af de k ere brudte, være Antallet af Led, som tilfredsstiller den Fordring, at de h Elementer A, B, C ... H forekommer i hvert af dem. I Skemaet (3) bliver $H:h$ at læse »H forekommer ikke i noget af Leddene«, Hh derimod »H forekommer i hvert af Leddene«.

---

[1]) En Opgave, hvori denne Ombytning ikke er tilladelig, men som ellers vilde lade sig behandle ad denne Vej, er: »Søg Antallet af Maader, hvorpaa Tallene a_1, a_2, a_3 ... a_n kunne opstilles i Række, naar to Tal, hvis Indices ere en Enhed forskjellige, ikke maa staa ved Siden af hinanden.« Med lignende Symbol som i forrige Opgave, vilde man her vel have f. Ex.: $a_1 : a_2$, $a_2 a_3 - a_1 : a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4 = a_1 : a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 : a_4$, men man har ikke $a_1 : a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 : a_4 = a_1 : a_2$, $a_2 : a_3$, $a_3 a_4$, idet disse Antal f. Ex. for $n = 4$ blive henholdsvis 6 og 2.

Den ved (2) omtalte Bytning er aabenbart tilladt. Man faar uden Regning Rækken af w at være

$$\begin{aligned} w_k &= [k], \\ w_{k-1} &= [k-1], \\ w_{k-2} &= [k-2], \\ &\vdots \\ w_1 &= [1], \\ w_0 &= [0] = 1. \end{aligned}$$

Og altsaa bliver ifølge (4) det søgte Antal den k'de Differens af disse Størrelser, hvilket jeg tidligere (1879, S. 135) har angivet at være det hele Tal nærmest ved $\frac{[k]}{e}$.

Man behøvede nu ganske vist ikke dette Apparat for at løse den lille Opgave. Men man faar ved denne Løsning som Tillæg, at Gjennemsnitsantallet af Elementer fra Diagonalrækken er i et Led af Determinanten ifølge (8)

$$G = k\frac{w_1}{w_0} = k\frac{[k-1]}{[k]} = 1,$$

uafhængig af k, og at Middelafvigelsen paa G ifølge (10) er

$$\mu_G^2 = k(k-1)\frac{[k-2]}{[k]} = 1,$$

ogsaa uafhængig af k.

I en anden Indklædning af samme Spørgsmaal vil Resultatet $G = 1$ sige følgende:

k Numre fordeles ved Lodtrækning til k Personer, et til hver. Derefter indsamles Numrene, og Fordelingen ved Lodtrækning gjentages. Der vil da uden Hensyn til Størrelsen af k blive i Gjennemsnit netop 1 Person, der faar samme Nummer begge Gange.

Opgave af Oppermann (1ste Aarg. S. 78): Et Antal af a Ægteskaber indgaas mellem m Ungkarle, m_1 Enkemænd og f Piger, f_1 Enker (altsaa $m + m_1 = f + f_1 = a$). Hvert af disse Ægteskaber vil høre til en af Grupperne: Ungkarl med Pige, Ungkarl med Enke, Enkemand med Pige, Enkemand med Enke. Føres alle mulige Kombinationer i Regning, hvor stort bliver da Middelantallet

i hver Gruppe og den til samme hørende Middelafvigelse efter de mindste Kvadraters Methode?

Søges Gjennemsnitsantallet og Middelafvigelsen for Gruppen mf, vil Opgaven kunne løses ved den oven angivne Fremgangsmaade, idet man tænker sig det Spørgsmaal fremsat, paa hvormange Maader de m Ungkarle A, B, C . . . M kunne vælge Hustruer blandt de a Kvinder, naar de m Betingelser skulle opfyldes, at hver af de m Ungkarle skal vælge blandt de f_1 Enker. Dette Facit, der naturligvis kan faas simpelt, er der ikke direkte Brug for, men hvis dette Spørgsmaal løses ved Hjælp af Skema (3), blive G og μ netop de søgte Størrelser. w_{m-h}, som skal være Antallet af Maader, hvorpaa de m Ungkarle kunne vælge Hustruer blandt de a Kvinder, dersom h bestemte af de opstillede Betingelser ere brudte, bliver nemlig da Antallet af Maader, hvorpaa de m Ungkarle kunne vælge Hustruer blandt de a Kvinder, naar de h Ungkarle A, B, C . . . H ikke maa vælge blandt de f_1 Enker, altsaa skulle vælge blandt de f Piger. Opgaven passer saa i Skemaet, naar $H:h$ læses »Ungkarlen H gifter sig med en Enke«, og Hh læses »H gifter sig med en Pige.«

Antallet w_{m-h} indses uden Regning at være

$$[h]\, C_{f,h} \cdot [m-h]\, C_{a-h,\, m-h}$$

eller

$$w_{m-h} = \frac{[f]}{[f-h]} \cdot \frac{[a-h]}{[a-m]}.$$

Deraf faas de tre øverste w, nemlig

$$w_m = \frac{[a]}{[a-m]},$$

$$w_{m-1} = f\frac{[a-1]}{[a-m]},$$

$$w_{m-2} = f(f-1)\frac{[a-2]}{[a-m]},$$

og det søgte Gjennemsnit og Middelafvigelsen bliver ifølge (8)

$$G = m\frac{w_{m-1}}{w_m} = \frac{mf}{a},$$

og ifølge (10)

$$\mu_G^2 = \frac{mf}{a} - \frac{m^2f^2}{a^2} + m(m-1)\frac{f(f-1)}{a(a-1)}$$
$$= \frac{mf}{a^2(a-1)}(a-m)(a-f)$$
$$= \frac{mfm_1f_1}{a^2(a-1)}$$

stemmende med, hvad Direktør Bing har fundet (1871, S. 59).

At adskillige af Størrelserne w_m, $w_{m-1} \ldots w_0$ og deres Differenser her kunne blive Nul, svækker aabenbart ikke Methodens Gyldighed. Efter deres Betydning kan ingen af dem blive negativ.

Endelig tør jeg maaske vise Anvendelsen paa en Opgave, jeg har stillet i 1879, men for øvrigt den Gang løst paa anden Maade, nemlig

Opg. 408. I en Pose haves nv Kugler af v forskjellige Farver, n af hver Farve. Paa hvor mange Maader kan man udtage r Kugler saaledes, at der i de udtagne er mindst 1 Kugle af hver Farve?

Kaldes Farverne A, B, C .. V, vil w_{v-h} betyde Antallet af Udtagningsmaader for r Kugler, naar de h Farver A, B, $C \ldots H$ ikke maa findes deri. Dette Antal er aabenbart simpelthen $C_{n(v-h),r}$, og altsaa

$$\begin{aligned} w_v &= C_{nv,r}, \\ w_{v-1} &= C_{n(v-1),r}, \\ &\vdots \\ w_1 &= C_{n,r}, \\ w_0 &= C_{0,r} = 0. \end{aligned}$$

Det søgte Antal bliver da den v'de Differens af disse Størrelser, eller

$$\Delta_v = C_{nv,r} - vC_{n(v-1),r} + \frac{v(v-1)}{1.2}C_{n(v-2),r} - \ldots,$$

idet der fortsættes, til et Led bliver Nul.

Det bemærkes med Hensyn til Opgaven, at den tilsyneladende nærliggende Løsning: Man udtager først 1 Kugle af hver Farve og multiplicerer Antallet af disse Udtagningsmaader med Antallet af Maader, hvorpaa de øvrige $r - v$ Kugler kunne udtages af hele Resten, er urigtig.

EN FLADE, FRA HVILKEN STRAALER UDGAAENDE FRA ET FAST PUNKT TILBAGEKASTES PARALLELT MED EN GIVEN PLAN OG GJENNEM EN GIVEN LINIE VINKELRET PAA DENNE.

(Af Fyringeniør J. S. Fleischer).

Tages i et retvinklet Koordinatsystem XY-Planen til Retningsplan, Begyndelsespunktet til det faste Punkt, hvorfra Lysstraalerne udgaa, og en Linie (parallel med Z-Axen), i XZ-Planen, i Afstand l fra Z-Axen til Samlingslinie for Straalerne, faas Ligningerne for Straalen og den tilbagekastede Straale henholdsvis:

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c} \quad \text{og} \quad \left\} \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{l-a} = \dfrac{y-b}{-b} \\ z = c, \end{array} \right.$$

idet a, b og c ere Koordinaterne til Punktet paa Fladen.

Disse 2 Linier skulle altsaa danne lige store Vinkler med Normalen til Fladen i Punktet (a, b, c) og ligge i en Plan med den, hvilket er Tilfældet naar: (idet Fladens Ligning er $F(a, b, c) = 0$)

$$\text{(A)} \quad \frac{a\dfrac{dF}{da} + b\dfrac{dF}{db} + c\dfrac{dF}{dc}}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.\sqrt{\left(\dfrac{dF}{da}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{db}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dc}\right)^2}} = \frac{(l-a)\dfrac{dF}{da} - b\dfrac{dF}{dc}}{\sqrt{(l-a)^2+b^2}\,.\sqrt{\left(\dfrac{dF}{da}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{db}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dc}\right)^2}}.$$

og $Aa + Bb + Cc = 0$; $A(l-a) - Bb = 0$; $A\dfrac{dF}{da} + B\dfrac{dF}{db} + C\dfrac{dF}{dc} = 0$, idet A, B og C ere Konstanterne til Planen, bestemt ved Normalen og de 2 Straaler; en Plan, som altsaa gaar gjennem Begyndelsespunktet. Ved at bortskaffe A, B og C, faas:

$$\frac{dF}{da} + \frac{l-a}{b}\frac{dF}{db} - \frac{l}{c}\frac{dF}{dc} = 0.$$

Af Ligning A) faas:

$$\left[a\sqrt{(l-a)^2+b^2} \mp (l-a)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right]\frac{dF}{da}+$$
$$b\left[\sqrt{(l-a)^2+b^2} \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2}\right]\frac{dF}{db}+c\sqrt{(l-a)^2+b^2}\,.\,\frac{dF}{dc}=0.$$

Af de to sidste Ligninger faas:

$$\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dc}}=-\frac{dc}{da}=-$$
$$\frac{\left[c^2(l-a)+b^2\,.\,l\right]\sqrt{(l-a)^2+b^2} \pm b^2\,.\,l\,.\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right]}{c\left[(a(l-a)-b^2)\sqrt{(l-a)^2+b^2} \mp ((l-a)^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right]}$$

og

$$\frac{\frac{dF}{db}}{\frac{dF}{dc}}=-\frac{dc}{db}=$$
$$\frac{b\left[(la+c^2)\sqrt{(l-a)^2+b^2} \mp l(l-a)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right]}{c\left[(a(l-a)+b^2)\sqrt{(l-a)^2+b^2} \mp ((l-a)^2+b^2)\sqrt{c^2+b^2+c^2}\right]}.$$

Begge Brøker kunne forkortes med

$$\left[a(l-a)-b^2 \mp \sqrt{(l-c)^2+b^2}\sqrt{c^2+b^2+c^2}\right]$$

i Tæller og Nævner, og man faar da

$$\frac{dc}{da}=\frac{-a\sqrt{(l-a)^2+b^2} \mp (l-a)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c\sqrt{(l-a)^2+b^2}};$$

$$\frac{dc}{db}=\frac{b\left[\sqrt{(l-a)^2+b^2} \mp \sqrt{a^2+b^2+c^2}\right]}{c\sqrt{(l-a)^2+b^2}},$$

hvilket kan omskrives til

$$\frac{c\frac{dc}{da}+a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\mp\frac{l-a}{\sqrt{(l-a)^2+b^2}};$$

$$\frac{c\frac{dc}{db}+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\pm\frac{b}{\sqrt{(l-a)^2+b^2}}.$$

Disse Differentialligninger svare til den oprindelige Ligning

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \mp \sqrt{(l-a)^2+b^2} = \text{en Konstant.}$$

Ved for a, b og c at sætte x, y og z, samt bortfjerne Rodtegnene

faas den søgte Flades Ligning, idet Konstanten nu betegnes ved a:

$$C)\ z^4 + 2(2xl - a^2 - l^2)z^2 + 4(l^2 - a^2)x^2 - 4(l^2 - a^2)lx - 4a^2y^2 + (l^2 - a^2)^2 = 0.$$

Naar z er konstant, fremstiller Ligningen for alle Værdier af $(l \pm a)$, der ere forskjellige fra 0 og ∞, en Hyperbel eller en Ellipse med Hovedaxer i XZ-Planen.

Sættes $x = x + l$, d. e. Begyndelsespunktet flyttes til Samlingsliniens Skjæringspunkt med XY-Planen, bliver Ligningen

$$[z^2 + (l^2 - a^2)]^2 + 4[z^2 + (l^2 - a^2)]lx + 4(l^2 - a^2)x^2 - 4a^2y^2 = 0,$$

der ogsaa kan skrives:

$$\frac{x^2}{\left[\frac{a(z^2 + l^2 - a^2)}{2(l^2 - a^2)}\right]^2} + \frac{y^2}{-\left[\frac{z^2 + l^2 - a^2}{2\sqrt{l^2 - a^2}}\right]^2} + \frac{(l^2 - a^2)\left(\frac{z^2 + l^2 - a^2}{2(l^2 - a^2)}\right)^2}{\left[\frac{a(z^2 + l^2 - a^2)}{2(l^2 - a^2)}\right]^2} + \frac{2\frac{l(z^2 + l^2 - a^2)}{2(l^2 - a^2)}x}{\left[\frac{a(z^2 + l^2 - a^2)}{2(l^2 - a^2)}\right]^2} = 0.$$

Den er en Ellipse eller en Hyperbel, idet z antages konstant, eftersom $l \lessgtr a$, med Brændpunkt i Z-Axen, altsaa i Samlingsaxen.

Naar $z = 0$ blive Axerne $\pm a$, og $\sqrt{l^2 - a^2}$ eller $\sqrt{a^2 - l^2}$, den første Værdi for Hyperblen, den sidste for Ellipsen. Naar z voxer, $l < a$, aftager Axernes Størrelse, indtil $z^2 = a^2 - l^2$, da Ellipsen bliver til et Punkt, hvorefter Axerne atter voxe.

Voxer z, for $l > a$, voxe Hyperblens Axer med z i det uendelige; Fladen har da 2 Næt uden fælles Punkter.

Sættes i Ligning C) $y = (l - x)\,tg\,\theta$, og løses Ligningen med Hensyn til z^2, faas:

$$z^2 = -2xl + a^2 + l^2 \pm \frac{2a(l - x)}{\cos\theta} = 2x\left(-l \mp \frac{a}{\cos\theta}\right) + a^2 + b^2 \pm \frac{2al}{\cos\theta}.$$

Det er Ligningen for Projektionen paa XZ-Planen af et Snit ved en Plan gjennem Samlingsaxen, ɔ: en Parabel.

Selve Snittets Ligning faas, naar $(l - x)$ sættes $= r\cos\theta$, idet θ er Vinklen mellem den skjærende Plan og XZ-Planen.

D) $z^2 = 2r\cos\theta\left(l \pm \frac{a}{\cos\theta}\right) + a^2 - l^2 = 2r(l\cos\theta \pm a) - (l^2 - a^2)$.

Denne fremstiller 2 Parabler, som i det elliptiske Tilfælde, $a > l$, vende Konkaviteten mod hinanden; i det hyperbolske Tilfælde, saalænge $\frac{a}{\cos\theta} > l$, 2 Parabler med Konkaviteten samme Vej; naar $\mp\frac{a}{\cos\theta} = l$, hvilket svarer til Asymptoternes Vinkel med X-axen for det horizontale Snit, gives kun en Parabel.

Naar $\cos\theta$ er beliggende mellem 0 og $\pm\frac{l}{a}$, faas 2 Parabler med Konkaviteten modsat Vej, men de høre begge til samme Hyperbelgren, altsaa til samme Næt, og skjære ikke hinanden.

Naar i Ligning C) l sættes ∞, $a = l + p$, og Ligningen divideres med l^2, faas

$$-4z^2 - 4y^2 + 8px + 4p^2 = 0,$$

altsaa en Omdrejnings Paraboloide.

Sættes $l = 0$, bliver Ligningen,

$$z^4 + 2a^2z^2 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + a^4 = 0$$

eller

$$(z^2 - a^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Det er den Flade, der fremkommer, naar en Parabel drejes om en Linie gjennem Brændpunktet, i Parablens Plan og lodret paa dens Hovedaxe.

Det kunde endnu have Interesse at undersøge Snit lodret paa X-axen, og Snit lodret paa Y-Axen, samt de Kurver, som de forskjellige Snits Brændpunkter danne, men jeg skal dog ikke her gaa videre.

Endnu skal dog omtales to vigtige Tilfælde, nemlig de Former af Fladen, som fremkomme, naar

$$a = 0 \text{ og } a = l.$$

Naar $a = 0$, falde den hyperbolske Forms 2 Næt sammen til et, Hyperblen bliver en ret Linie, der er Frembringer til en parabolsk Cylinder, idet Ledeliniens, Parablens Parameter $= l$.

Naar $a = l$ bliver Ligningen

$$z^4 + 4l(x - l)z^2 - 4l^2y^2 = 0.$$

Det vertikale Snit gjennem Brændpunkt og Samlingsaxe er

X-Axen og en Parabel med Parameter l; de horizontale Snit ere Parabler med Brændpunkter i Samlingsaxen og Parameter $\frac{z^2}{2l}$, — efterhaanden som Snittet nærmer sig *XY*-Planen, bliver denne mindre og mindre, indtil 0, naar Parablen svinder ind til at være *X*-Axen.

Fladens to Hovedformer synes mig klare af det udviklede.

Den elliptiske Form kan tænkes frembragt ved, at en Parabel drejes om en fast Linie (Samlingsaxen) lodret paa dens Hovedaxe og i dens Plan, saaledes at de 2 Punkter i Samlingslinien blive faste, medens Parablens Toppunkt følger en Elipse, hvis ene Brændpunkt ligger i Samlingsaxen midt imellem de to faste Punkter. Mellem disse faas en lukket Del af Fladen, udenfor disse 2 tragtformige Dele af den.

Den hyperbolske Form af Fladen kan tænkes opstaaet ved, at en Hyperbel bevæger sig med sine Toppunkter paa 2 Parabler, der ligge i samme Plan, have samme Brændpunkt og Hovedaxe og som vende Konkaviteten samme Vej, idet Hyperblens Plan er vinkelret paa Parablernes Plan og parallel med deres fælles Storaxe, Hyperblens Lilleaxe varierer med z efter følgende Lov:

$$z^2 = 2\sqrt{l^2 - a^2}\, b - (l^2 - a^2)$$

uddraget af Ligningerne; idet b er den halve Lilleaxe.

OM DEN MATHEMATISKE BEHANDLING AF GNIDNINGS-MODSTANDEN.

(AF H. G. ZEUTHEN).

En statisk Opgave, hvor man tager Hensyn til Gnidningsmodstanden bliver sædvanligvis ubestemt derved, at man ikke kjender selve den nævnte Modstand, men kun Grænser, inden for hvilke den skal ligge. Man lader da imidlertid Opgaven gaa ud paa at finde Grænser for de mulige Ligevægtstillinger eller Lige-

vægtsbetingelser, og gaar saa sædvanligvis ud fra, at Gnidningsmodstanden da ogsaa naar sin Grænseværdi, eller at dens Indflydelse paa det bevægelige Legeme eller System af Legemer da er saa stor, som den overhovedet kan blive i Forhold til det normale Tryk.

Rigtigheden af denne Forudsætning vil for de sædvanligste Anvendelsers Vedkommende, saaledes ved dem, der forekomme i Jul. Petersens Statik, være saa indlysende, at der ved dem ikke er Anledning til nærmere at begrunde den. Til at give en saadan, opfordres man dog, naar man vil gjøre sig Rede for den Begrænsning, som man maa underkaste Anvendelsen af denne Forudsætning, og de Farer, som det mulig kunde medføre, at overse denne Begrænsning.

Hvor let den almindelige Besvarelse af disse Spørgsmaal end lader sig give paa Forhaand, skulle vi dog begynde med Betragtning af et Par Exempler. Opgaven 103 i den anførte Bog hedder: En homogen Stang med Længde $2l$ og Vægt V støtter sig med sit ene Endepunkt A til en horizontal, med det andet B til en vertikal Plan. Gnidningskoefficienterne ere μ og μ_1. Find Ligevægtstillingen. (Det viser sig ved Løsningen at være forudsat, at Stangen selv ligger i en lodret Plan, vinkelret paa den lodrette Væg).

Opgaven løses ved at kalde Trykkene i B og i A X og Y og Stangens Vinkel med den vandrette Plan v. Der skal da være Ligevægt imellem Stangens Vægt V, Trykkene X og Y og Gnidningsmodstandene $\mu_1 X$ og μY. Af de herfor opstillede Betingelser kan udledes

$$tg\, v = \frac{1 - \mu\mu_1}{2\mu},$$

som altsaa bestemmer Vinklen v i »Ligevægtstillingen«.

Herimod vil i hvert Fald intet være at indvende, hvis der ved »Ligevægtstillingen« forstaas en vilkaarlig blandt dem, som ere mulige, og μ og μ_1 betegne de i denne Ligevægtstilling virkende Gnidningsmodstandes Forhold til Trykkene, eller hvad vi kunne kalde de faktiske Gnidningskoefficienter. Ordet Gnid-

ningskoefficient betyder imidlertid efter de foregaaende Definitioner den største Værdi, som denne faktiske Gnidningsmodstand kan faa. Den Bestemmelse af v, som tilsigtes, maa altsaa være den mindst mulige, den, for hvilken Stangen er paa Nippet til at glide.

At det fundne Resultat ogsaa er rigtigt, naar det opfattes saaledes, kan ses deraf, at det fundne Udtryk for $tg\ v$ aftager, naar μ eller μ_1 voxer. Det indses ogsaa ved følgende Betragtning: Hvis Stangen skulde glide, vilde baade A og B glide, Gnidningsmodstanden altsaa overvindes i begge disse Punkter. Skal den være paa Nippet til at glide, maa Gnidningsmodstanden altsaa ogsaa i dem begge have naaet sin størst mulige Værdi.

Denne sidste Betragtningsmaade lader sig altid anvende, naar et Legeme eller et System af Legemer ikke kan bevæge sig, uden at der finder Glidning Sted i alle de Punkter, hvor man tager Hensyn til Gnidningsmodstanden. I saa Fald vil man finde Grænsebetingelserne for Ligevægt ved at tillægge de faktiske Gnidningskoefficienter deres størst mulige Værdier.

For at faa et Exempel, hvor den opstillede Forudsætning ikke finder Sted, kunne vi gjøre en lille Forandring i den her omtalte Opgave, idet vi til de øvrige Forudsætninger føje den, at Stangen skal være elastisk og foruden at være underkastet Tyngden, være presset saa stærkt sammen, at Gnidningsmodstanden i begge Stangens Endepunkter maa hæve en Bestræbelse hos disse efter at fjerne sig fra den vandrette og lodrette Plans Skjæringslinie, eller, idet vi tænke Opgaven reduceret til en plan Opgave, fra Skjæringspunktet O mellem den vandrette Linie OA og den lodrette Linie OB, hvorpaa Stangens Endepunkter A og B skulle glide.

Antager man her, at der alene spørges om den Vinkel v, som Stangen danner med den vandrette Linie OA, kan man henvise til den foregaaende Behandling, idet der maa være Ligevægt mellem de ydre Kræfter, som paavirke Stangen. Disse ere som før, Stangens Vægt V, virkende i Tyngdepunktet, den vandrette Plans Modtryk i A mod Stangen Y og dens Gnidningsmodstand μY, samt den lodrette Plans Modtryk X_1 og dens Gnidnings-

modstand $\mu_1 X_1$ i B. Der er kun den Forskjel, at $\mu_1 X_1$ her ligesom μY virker ind imod O, medens den før virkede bort fra O. Den forud fundne Formel maa altsaa kunne benyttes, naar man blot ombytter μ_1 med $-\mu_1$. Man faar altsaa

$$tg\, v = \frac{1 + \mu\mu_1}{2\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} + \mu_1\right). \tag{1}$$

Denne Betragtningsmaade er fuldkommen rigtig, hvis man blot søger en Ligevægtstilling, og μ og μ_1 betegne de til denne hørende faktiske Gnidningskoefficienter. Det ses imidlertid let, at det ikke gaar an at tro, at man finder Stangens Grænsestilling ved samtidig at give μ og μ_1 deres størst mulige Værdier eller lade dem være de egentlige Gnidningskoefficienter; thi naar baade μ og μ_1 voxe, kan det først, naar man kjender en anden Afhængighed mellem dem, afgjøres, om $tg\, v$ voxer eller aftager.

Det er imidlertid let at indse, at ogsaa her Grænsestillingerne af Stangen maa svare til Maximumsværdier enten af μ eller af μ_1, og at dette ogsaa i andre Opgaver, hvori to Gnidningsmodstande indgaa, maa finde Sted med alle saadanne Grænsestillinger, hvor Bevægelse er paa Nippet til at indtræde. Bevægelsen indtræder nemlig først, naar mindst en af Gnidningsmodstandene overvindes, og da kun der, hvor dette er Tilfældet, men derimod ikke der, hvor den faktiske Gnidningskoefficient ikke har naaet sit Maximum.

De fuldstændige Ligevægtsbetingelser kunde undersøges særlig i disse Grænsetilfælde, men Forholdene overses dog lettest ved en almindelig Behandling af en vilkaarlig Ligevægtstilling, hvorved indføres de til denne hørende faktiske Gnidningskoefficienter μ og μ_1. Dette skal her gjennemføres for den foreliggende Opgave.

Vi skulle derved anvende de virtuelle Hastigheders Princip og antage, at Stangens Endepunkter forskydes Stykkerne δx og δy_1 henad OA og OB. Tyngdepunktet løftes derved $\frac{1}{2}\delta y$, og Stangens Længde $l = \sqrt{x^2 + y_1^2}$ faar Tilvæxten

$$\delta l = \frac{x}{l}\,\delta x + \frac{y_1}{l}\,\delta y_1 = \cos v\,\delta x + \sin v\,\delta y_1,$$

idet v antages at være den spidse Vinkel mellem Stangen og den vandrette Plan. Kalde vi Stangens Spænding (ved Tryk) eller den Kraft, hvormed A og B frastøde hinanden, L, haves da (se Petersens Statik 100)

$$-\mu_1 X_1 \delta y_1 - \frac{1}{2} V \delta y_1 - \mu Y \delta x + L \delta l = 0,$$

eller ved Indførelse af Udtrykket for δl

$$L \sin v = \mu_1 X_1 + \frac{1}{2} V,$$

$$L \cos v = \mu Y.$$

Hertil maa endnu komme de to Ligninger, som, hvis alle andre Kræfter vare givne, vilde bestemme Trykkene X_1 og Y. De kunne faas ved at projicere alle Kræfter paa de to Axer. Man faar

$$X_1 = \mu Y, \quad Y = \mu_1 X_1 + V.$$

De fundne 4 Ligninger give to, som ere helt uafhængige af Trykkene, nemlig

$$\left. \begin{aligned} L \sin v &= \frac{1}{2} V \frac{1 + \mu\mu_1}{1 - \mu\mu_1} \\ L \cos v &= V \frac{\mu}{1 - \mu\mu_1}. \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

Division af disse Ligninger giver det allerede benyttede Udtryk for $tg\, v$.

Naar L, der iøvrigt afhænger af Stangens Forkortning, og V ere givne, kan man bestemme de Stillinger, i hvilke Stangen er paa Nippet til at glide, ved at give enten den ene eller den anden af Størrelserne μ og μ_1 sin Maximumsværdi. Ligningerne tjene da til at bestemme v og den anden. For at Stillingen virkelig skal være en Grænse, som Ligevægtstillingerne kunne naa, kræves der, at den anden Koefficient ikke samtidig overskrider sit Maximum.

Som Exempel kunne vi betragte det Tilfælde, hvor Stangens Vægt er forsvindende. Ligningerne (2) medføre da umiddelbart kun $\mu\mu_1 = 1$, men den ene kan forud tænkes ombyttet med (1). Man faar da

$$tg\, v = \frac{1}{\mu} = \mu_1,$$

et Resultat, som umiddelbart let lod sig forudse. Ere de to

Gnidningsvinkler u og u_1, ɔ: have μ og μ_1 til Grænseværdier $tg\,u$ og $tg\,u_1$, faas

$$90 - u \overline{\overline{<}}\, v \leqq u_1,$$

og Mulighedsbetingelsen for, at Ligevægt overhovedet skal finde Sted, er

$$u + u_1 \geqq 90^0.$$

Bevægelsen kan altsaa kun da være paa Nippet til at begynde, naar en af de faktiske Gnidningskoefficienter har naaet sin Grænseværdi. Man behøver altsaa ikke i det nærværende Exempel yderligere at søge Maxima eller Minima af $tg\,v$ betragtet som Funktion af μ, af hvilken μ_1 kan udtrykkes som Funktion ved Hjælp af en af Ligningerne (2). Et saadant Maximum eller Minimum vil her ikke indtræde, men hvis et saadant skulde indtræde i andre Opgaver, vilde det udtrykke, at de af Gnidningskoefficienterne uafhængigige geometriske Betingelser hindre Legemet i at komme ud over de derved bestemte Grænser — eller muligvis blot, at i Undersøgelsen disse geometriske Betingelser have faaet et altfor snevert analytisk Udtryk.

Et Exempel herpaa kan man skaffe sig ved i Stedet for at lade $\frac{L}{V}$ være given at antage, at Stangens Sammentrykning tilvejebringes paa en saadan Maade, at en Funktion af $\frac{L}{V}$ og v bliver den bekjendte Størrelse, f. Ex. $4\,\frac{L^2}{V^2}\,cos\,2v$. Kalde vi denne Størrelse, som vi ville antage positiv, k, udleder man af Ligningerne (2)

$$4\mu^2 - (1 + \mu\mu_1)^2 = k(1 - \mu\mu_1)^2,$$

og borteliminerer man μ mellem denne og (1), faas

$$1 - tg^2 v = k(tg\,v - \mu_1)^2.$$

Maximumsværdien af $tg\,v$ bliver da

$$tg\,v = 1 = \mu_1 = \mu.$$

Om den derved bestemte Grænsestilling overhovedet kan naas, beror paa, om μ og μ_1 kunne naa op til Værdien 1. Det er kun, naar 1 er selve Grænseværdien for μ eller μ_1, at Stangen i denne Grænsestilling vil være paa Nippet til at glide. Grunden til, at

den heller ikke ellers kan overskrides, er blot den her gjorte Forudsætning, at $k > 0$, som for reelle Værdier af $\frac{L}{V}$ ikke kan forliges med $2v > 90^{\circ}$.

Det Princip, som er at anvende paa den her foreliggende Art af Opgaver, kan udtrykkes paa følgende Maade: Betingelsen for, at et System af Legemer, der er underkastet givne Kræfter, deriblandt Gnidningsmodstande, skal være paa Nippet til at foretage en vis bestemt Bevægelse, er, at de faktiske Gnidningskoefficienter faa deres størst mulige Værdier i alle Punkter, hvor ved denne Bevægelse Glidning skulde finde Sted. Ellers vilde ved en lille Overskridelse af disse Grænser Bevægelsen nemlig endnu kunne hindres blot ved en lille Forøgelse af Gnidningsmodstanden i et af disse Punkter. Dette vil ved Anvendelse af de virtuelle Hastigheders Princip paa den Forskydning, som skulde være paa Nippet til at indtræde, vise sig derved, at alle de Led, som indeholde Gnidningsmodstandene og altsaa have de faktiske Gnidningsfaktorer til Faktorer, blive negative. Samlingen af disse Led vil altsaa ikke faa sin numerisk største Værdi, uden at de indenfor visse Grænser ubekjendte Koefficienter alle gjøre det.

ANTALLET AF FRI BEVÆGELSER I ET LEDDET STANGSYSTEM.

(AF KR. BIRKELAND).

I Aargang 1877 af »Tidskr. for Math.« har Prof. Zeuthen leveret en Artikel om leddede Stangsystemer.

I en Note nedenunder anføres Sylvesters Antalsbetingelse, for at Forbindelsen i et saadant System skal være fuldstændig, ɔ: at der kun behøves en Bestemmelse til, for at gjøre Systemet fast.

Hans Ligning lød:

$$3s - 2l = 4,$$

hvor s og l betegner respektive Antal af Stænger og Led.

Under Optællingen af Led maa man iagttage, at k Stænger fra et Hjørne danne $(k - 1)$ Led.

Den her nævnte Formel er et specielt Tilfælde af en Formel, der udtrykker, hvor mange af hinanden uafhængige Bevægelser et leddet Stangsystem har, naar en Stang holdes fast. Hvis Antallet af Hjørner betegnes med h og Antallet af sluttede Polygoner med p, har Systemet:

$$h - p - 2$$

af hinanden uafhængige Bevægelser.

Formlen ses umiddelbart at gjælde for en enkelt lukket Stangpolygon; thi der er Antallet af uafhængige Bevægelser det samme som Antallet af Diagonaler fra et Hjørne, idet Anbringelsen af disse er tilstrækkelig til at gjøre Systemet fast. Satsen gjælder videre for et Stangsystem med $(p + 1)$ Polygoner, naar den gjælder for et System af p Polygoner. Vi vil antage, at den Polygon, der bliver at tilføje, har h' Hjørner, og at α af disse ere fælles med det oprindelige System. Tænke vi os for et Øjeblik den oprindelige Del af Systemet fast, vil Forbindelseslinien mellem de yderste fælles Hjørner ogsaa være fast, og et Blik paa en Figur vil vise, at den tilføjede Polygon har lige mange frie Bevægelser som en Polygon med $(h' - \alpha + 2)$ Sider, altsaa: $(h' - \alpha - 1)$.

Da nu Tilvæksten af Hjørner er $h' - \alpha$, af Polygoner 1, bliver altsaa Tilvæksten i vor Formel: $(h' - \alpha - 1)$, ɔ: Formelen gjælder fremdeles.

Skal Forbindelsen i et System være fuldstændig, har man Antalsbetingelsen:

$$h - p = 3.$$

Vil man overføre denne Formel til Sylvesters, kan man benytte Formelen: $2s = h + l$, i Forbindelse med den af Eulers Formel om Flader, Sider og Hjørner i et Polyeder erholdte, naar man bemærker, at i det Antal, vi kalde p, er den yderste Kontur ikke medregnet.

Den første Formel indses ved at tælle op Antallet af Stænger paa hvert Hjørne; thi denne Sum er paa den ene Side $= 2s$, paa den anden $(h + l)$.

Man vil se, at Formlen om Antallet af Bevægelser gjælder, om man tilføjer enkelte Stænger med frie Ender. I Tilfælde forøges ikke Antallet af Polygoner, men vel Antal Hjørner.

Endvidere kan Formlen tillæmpes for det Tilfælde, at Stængerne fra et Hjørne indbyrdes danne konstante Vi Man medregner da Antallet af disse sidste i Antallet af Polyg thi at Vinklen mellem to Stænger er konstant, har samme Virk som om Stængernes fri Ender var forbundne med en Stang. specielt Tilfælde af dette er det, naar noget af Leddene ikke f i Stængernes Endepunkter. Den konstante Vinkel er da lige.

EXAMENSOPGAVER.

De lærde Skolers Afgangsexamen. Juni 1886.

Arithmetik.

1. En Differensrække paa x^p Led har til første Led x^{p+1} $x^p + 1$ og Summen x^{2p+1}. Find Differensen og sidste Led.

Vis dernæst, hvorledes enhver Potens af et helt Tal m ulige Exponent kan udtrykkes ved en Sum af flere paa hinand følgende ulige Tal.

Paa hvilke Maader kan man ad denne Vej opløse 5^{5^5} i Sum af paa hinanden følgende ulige Tal, og hvor mange Led find der i hver af de saaledes dannede Summer?

2. En Mand sætter i n paa hinanden følgende Termine samme Sum ud paa Rente og Rentes Rente, men hæver i hver a de næste n Terminer den samme Sum. Hvor meget har Mande tilbage af sin Kapital umiddelbart efter den sidste Hævning?

Hvor stor maa n være, naar denne Rest er p Gange den op rindelig udsatte Sum?

Ex. $p = 13$, Renten 5 pro Cent.

Geometri.

1. Forholdet imellem en Omdrejningskegles (ret cirkulær Kegles) omskrevne og indskrevne Kugles Overflade er m. Hvor stor er Keglens Toppunktsvinkel, og hvilke Værdier kan m have?

Ex. $m = \frac{81}{16}$.

2. I et retvinklet Koordinatsystem er der givet en ret Linie med Ligning $x + y = 0$ og et Punkt $\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$. Find Ligningen for den Kurve, hvis Punkter have samme Afstand fra den rette Linie og fra Punktet, og vis, at den kan bringes paa Formen $\pm \sqrt{\frac{y}{a}} \pm \sqrt{\frac{x}{a}} = 1$.

Hvilket Keglesnit maa Kurven være, og hvorledes maa det ligge i Koordinatsystemet?

Beregningsopgave.

Et sexkantet Areal $MNPQRS$ paa 75 Td. Land deles af Diagonalen $MQ = 1200$ Alen i to lige store Stykker. Man ved desuden, at Siderne MN og MS ere lige store, hver lig 860 Alen, at Diagonalerne MP og MR ere 1140 Alen hver, samt at $\angle MQP = \angle MQR = 69^\circ 20'$, men Trekanterne MQP og MQR ere dog ikke kongruente. Hvor store ere Vinklerne QMN og QMS?

1 Td. Land = 14000 Kvadratalen.

Projektionstegning.

En ret Keglestub (ret afkortet Kegle) staar paa den vandrette Billedplan (Projektionsplan), dens Højde er halvanden Gang Grundfladens Radius og dens øverste Endeflades Radius det halve af den sidstnævnte. I Centrum af Keglestubbens øverste Endeflade hviler en Kugle med samme Radius, som Keglestubbens Grundflade har. Konstruer en Plan, som tangerer Keglestubben i en Frembringer, der ikke er parallel med den lodrette Billedplan, og find Planens Skjæring med Kuglen baade i begge Billedplaner og i sand Størrelse.

Opgaver ved en Magisterkonferens i Fysik. Decbr. 1886.

1) Find den partielle Differentialligning for en Flade, der har den Egenskab, at enhver Tangentplans Spor paa xy-Planen i et retvinklet Koordinatsystem danner en given Vinkel med Begyndelsespunktets Forbindelseslinie med Berøringspunktets Projektion paa samme Plan.

Find Projektionerne paa xy-Planen af samme Flades Linier af størst Fald mod samme Plan.

Integrer Differentialligningen, og bestem Fladen saaledes, at den gaar igjennem en given ret Linie gjennem Begyndelsespunktet.

Opl. Idet Tangens til den givne Vinkel kaldes α, bliver Differentialligningen

$$p(x + \alpha y) + q(y - \alpha x) = 0.$$

Linierne af størst Fald bestemmes ved

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p} = -\frac{x + \alpha y}{y - \alpha x},$$

som er homogen i x og y. Integrationen antager den simpleste Form ved Omskrivningen

$$ydy + xdx = \alpha(xdy - ydx),$$

som lettest behandles ved Indførelse af polære Koordinater. Man faar

$$rdr = \alpha r^2 d\theta,$$

altsaa

$$r = c\, e^{\alpha\theta}$$

eller en Række logarithmiske Spiraler.

Integrationen af Fladens Differentialligning afhænger af Integration af Ligningerne

$$\frac{dx}{x + \alpha y} = \frac{dy}{y - \alpha x} = \frac{dz}{0},$$

af hvilke den sidste giver $z = c_1$, medens den første, naar man ogsaa her indfører polære Koordinater r og θ for x og y giver

$$r = c_2\, e^{-\frac{\theta}{\alpha}}.$$

Fladens Ligning bliver da

$$z = f\left(r \,.\, e^{\frac{\theta}{\alpha}}\right),$$

hvor f er en ubekjendt Funktion. Skal Fladen gaa igjennem den rette Linie $\theta = \beta$, $z = \gamma r$, faas

$$z = \gamma r e^{\frac{\theta}{a} - \frac{\beta}{a}},$$

som fremstiller en Kegleflade med Toppunkt i Begyndelsespunktet og med en logarithmisk Spiral i en Plan parallel med xy-Planen til Ledelinie.

(Selvfølgelig kunne Integrationerne ogsaa gjennemføres uden Brug af polære Koordinater).

2. Et bevægeligt Punkt P frastødes fra to faste Punkter A og B med lige store Kræfter, der ere proportionale med $AP + PB - AB$.

Hvorledes kan Punktets Hastighed da udtrykkes som Funktion af dets Afstande fra A og B?

Bevægelsen undersøges særlig i det Tilfælde, hvor P udgaar fra et Punkt af en Linie, vinkelret paa Midten af AB med en paa samme Linie faldende Begyndelseshastighed, som vilde lade det ankomme til AB med Hastigheden Nul. Hvor lang Tid behøver det for at naa til AB?

Opl. Tages Linien AB til Abscisseaxe, Perpendikulæren paa Midten til Ordinataxe og sættes $AB = 2a$, $AP = r$ og $BP = r_1$, bliver

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu (r + r_1 - 2a)\left(\frac{x-a}{r} + \frac{x+a}{r_1}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu (r + r_1 - 2a)\left(\frac{y}{r} + \frac{y}{r_1}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mu (r + r_1 - 2a)\left(\frac{z}{r} + \frac{z}{r_1}\right),$$

hvoraf ved Sætningen om levende Kraft faas

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k + \mu (r + r_1 - 2a)^2,$$

hvor k er en Konstant.

I det specielt opgivne Tilfælde er $x = z = 0$, $r = r_1 = \sqrt{a^2 + y^2}$, og $y = 0$ (eller $r + r_1 = 2a$) skal give $\frac{ds}{dt} = 0$. Altsaa er $k = 0$.

Man faar da

$$\frac{dy}{dt} = \pm 2\sqrt{\mu}\,(\sqrt{a^2 + y^2} - a),$$

hvor Fortegnene $\pm$ svare til Bevægelsen ud fra AB og den her nærmest omspurgte Bevægelse hen imod AB. Heraf faas, naar h er Begyndelsesværdien af y,

$$t = \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_h^y \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}-a} = \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_h^y (\sqrt{a^2+y^2}+a)\frac{dy}{y^2}.$$

$\int \sqrt{a^2+y^2}\,\frac{dy}{y^2}$ kan bestemmes ved at sætte $a^2+y^2 = u^2 y^2$.

$$\int \sqrt{a^2+y^2}\,\frac{dy}{y^2} = -\frac{\sqrt{a^2+y^2}}{y} + l\frac{\sqrt{a^2+y^2}+a}{a}.$$

Man faar altsaa

$$t = \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}+a}{h} - \frac{\sqrt{a^2+y^2}+a}{y} + l\frac{\sqrt{a^2+y^2}+y}{\sqrt{a^2+h^2}+h}\right).$$

Nederste Fortegn og $y = 0$ giver $t = \infty$, som er den Tid, Punktet bruger for at naa Linien AB.

LØSNING AF OPGAVERNE 195, 241, 266, 411, 502, 538, 539, 528, 530.

---

195. Naar x, y og z betegne de tre Sider i en Trekant, hvor stort vil da det største Areal være, naar Siderne skulle opfylde Betingelsen

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3m^3,$$

hvor m er en Konstant.

Lad først z have en konstant Værdi a; man faar da, idet Trekantens Areal kaldes A

$$16A^2 = 2(x^2y^2 + a^2x^2 + a^2y^2) - x^4 - y^4 - a^4. \quad (1)$$

Tillige haves

$$x^3 + y^3 = 3m^3 - a^3. \quad (2)$$

Tænkes nu y udtrykt ved x ved Hjælp af (2), og dens Værdi indsættes i (1), faar man

$$16A^2 = f(x),$$

hvor Maximum bestemmes ved $f'(x) = 0$.

Man faar, idet (2) giver $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$,

$$f'(x) = 4\frac{x}{y}(y-x)((x+y)^2+a^2),$$

hvoraf $x = y = \frac{\sqrt[3]{3m^3-a^3}}{2}$, idet x og y skulle være positive, medens Arealet bliver Minimum for $x = 0$.

At der virkelig er Maximum, følger af, at $f''(x)$ for den angivne Værdi bliver negativ.

For at bestemme Maximum af Trekantens Areal, naar z varierer, indses det som Følge heraf, at Trekanten bliver ligesidet. Var nemlig 2 af Siderne ulige store, kunde man bestemme en ligebenet Trekant paa den tredie Side, som opfylder Betingelsen $x^3 + y^3 + z^3 = 3m^3$ og har større Areal.

Maximum af Trekanten bliver følgelig $\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$.

(A. S. Bang).

241. Find Punkterne $A_1, A_2 \ldots A_{m-1}, A_m$ i en Parabel saaledes, at Tangenterne til disse Punkter ere parallele med Afstandene $FA_m, FA_1, FA_2 \ldots FA_{m-1}$, idet F er Parablens Brændpunkt.

Lad $\angle XFA_1$ være lig v, idet den positive Retning af X-Axen er valgt fra Toppunktet henimod Brændpunktet. Trækkes nu en Tangent parallel med FA_1 og dens Røringspunkt er A_2, vil $\angle XFA_2$ være lig $2v$, hvilket følger af, at Tangenten halverer Vinklen mellem Brændstraalen til Røringspunktet og en Linie, parallel med Axen. Heraf faar man atter

$$\angle XFA_3 = 4v,\ \angle XFA_4 = 8v \ldots \angle XFA_m = 2^{m-1}v.$$

Da nu Tangenten i A_1 er parallel med FA_m, faar man til Bestemmelse af Vinkel v

$$2^m v = v + 2p\pi,$$

altsaa

$$v = \frac{2p\pi}{2^m - 1}.$$

Ved at tillægge p forskjellige Værdier, kan man faa forskjellige Løsninger.

Lad nu største fælles Faktor for $2^m - 1$ og p være f, saa at

$$2^m - 1 = f.a, \; p = f.q \quad \text{og} \quad v = \frac{2q\pi}{a}.$$

Er endvidere det mindste hele Tal, som tilfredsstiller Kongruensen

$$2^x \equiv 1 \; (mod\; a)$$

n, hvor $n < m$, maa man som bekjendt have $m = n_1 . n$, hvoraf følger, at Linierne FA_1, FA_2 ... falde sammen med FA_{n+1}, FA_{n+2} . ., hvorved m-Kanten $A_1 A_2 \ldots A_m$ reduceres til n-Kanten $A_1 A_2 \ldots A_n$ tagen n_1 Gange. Opgaven føres da tilbage til den samme Opgave for en mindre Værdi af m. Vi kunne derfor se bort fra disse Løsninger og forudsætte, at den mindste Værdi af x, som tilfredsstiller Kongruensen, er m.

Det skal nu undersøges, for hvilke Værdier af n Opgaven kan løses ved Lineal og Passer. Betingelsen herfor er, at a er Produktet af ulige store Primtal af Formen $2^{2^\alpha} + 1$, altsaa at

$$a = (2^{2^{\alpha_1}} + 1)(2^{2^{\alpha_2}} + 1) \ldots (2^{2^{\alpha_n}} + 1),$$

hvor det antages, at $\alpha_n > \alpha_{n-1} \ldots > \alpha_1$.

Da den mindste Værdi af x, som tilfredsstiller Kongruensen

$$2^x \equiv 1 \; (mod\; 2^{2^{\alpha_n}} + 1)$$

er $2^{\alpha_n + 1}$, faar man, at den mindste Værdi af x, som tilfredsstiller Kongruensen

$$2^x \equiv 1 \; (mod\; a),$$

er $2^{\alpha_n + 1}$, hvoraf følger, at $m = 2^{\alpha_n + 1}$.

Betingelsen for, at Opgaven kan løses ved Lineal og Passer, er altsaa, at $m = 2^{\alpha_n + 1}$ og at $2^{2^{\alpha_n}} + 1$ er et Primtal.

At denne Betingelse er tilstrækkelig, følger af, at man ved at lade f indeholde Produktet af samtlige Primfaktorer i $2^m - 1$, som ikke have Formen $2^{2^\alpha} + 1$, i de Potenser, hvori de forekomme, faar dels, at $v = \frac{2q\pi}{a}$ kan konstrueres ved Lineal og Passer, dels at den mindste Værdi af x, der tilfredsstiller Kongruensen $2^x \equiv 1 \; (mod\; a)$ er m.

(A. S. Bang).

266. **At finde den Funktion, som tilfredsstiller Fundamentalligningen**

$$f(x) + f(y) = f(x+y)\,[1 - f(x)\,f(y)].$$

Sættes i Fundamentalligningen $y = 0$, faar man

$$f(0) = -f(0)\,[f(x)]^2,$$

altsaa $f(0) = 0$.

Ligningen skrives nu

$$f(y) + f(x)\,f(y)\,f(x+y) = f(x+y) - f(x),$$

hvoraf følger, ved Taylors Række,

$$\frac{f(y)}{y} + f(x)\,f(x+y)\frac{f(y)}{y} = f'(x) + \frac{y}{1\,.\,2}f''(x) + \dots$$

Sættes $y = 0$, og den sande Værdi af $\frac{f(y)}{y}$ for $y = 0$ kaldes k, giver dette

$$k + k\,[f(x)]^2 = f'(x),$$

som integreres ved $\quad f(x) = tg\,(kx + c)$,

hvor man maa have $\quad c = p\pi$, da $f(0) = 0$.

(A. S. Bang).

411. **p og r ere Primtal, $p > 41$ og r det numerisk mindste Primtal, som tilfredsstiller Kongruensen**

$$p \equiv r\ (mod\ 40),$$

dog 1 undtagen.

Bevis, at naar $\quad 10^{\frac{r-1}{k}} \equiv 1\ (mod\ r)$

vil Kongruensen $\quad 10^{\frac{p-1}{k}} \equiv 1\ (mod\ p)$

ogsaa være rigtig.

(Birger Hansted).

Den angivne Sætning er ikke almengyldig, hvad man kan overbevise sig om ved at gjøre Prøve med $p = 131$. Man faar da $r = 11$, og da

$$10^{\frac{10}{5}} \equiv 1\ (mod\ 11),$$

skulde man have $\quad 10^{\frac{130}{5}} \equiv 1\ (mod\ 131)$,

medens det viser sig, at $10^{26} \equiv 58\ (mod\ 131)$.

Vi skulle nu vise, at Sætningen er rigtig, naar $r = 11$ undtages.

p kan for Modulus 40 give til Rest ethvert Tal mindre end

og primisk med 40. Idet man for hver af disse Rester søger, hvad r bliver, faar man, idet dog som forlangt 1 undtages, at r kan være et af Tallene

$$3,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19 \text{ eller } 31.$$

For de Værdier af r, for hvilke 10 er en primitiv Rod, udtrykker Sætningen, at

$$10^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p),$$

og er følgelig korrekt. Disse Værdier ere

$$3,\ 7,\ 17 \text{ og } 19.$$

Tilbage haves da $\quad r = 11,\ 13$ eller $31.$

For $r = 11$ gjælder, som paavist, Sætningen ikke.

Er $r = 13$, faar man, da den mindste Værdi af x, som tilfredsstiller Kongruensen,

$$10^x \equiv 1 \ (mod\ 13),$$

er $x = 6$, at k maa være 2, saa man skal bevise, at

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ p),$$

hvor $p = 40a \pm 13$.

Reciprocitetssætningen giver nu

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (mod\ p), \text{ da } p \equiv \pm 5 \ (mod\ 8),$$

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (mod\ p), \text{ da } p^{\frac{5-1}{2}} \equiv -1 \ (mod\ 5),$$

hvoraf ved Multiplikation $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

Er $r = 31$, bliver den mindste Værdi af x, som tilfredsstiller Kongruensen

$$10^x \equiv 1 \ (mod\ 31),$$

$x = 15$, saa at ligeledes her $k = 2$.

Endvidere er, da $k = 40a \pm 31$

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

og $\quad 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ p)$, idet $p^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ 5)$,

følgelig $\quad 10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ p).$

Altsaa gjælder Sætningen, idet for r Værdierne 1 og 11' undtages.

(A. S. Bang)

502. Bestem de entydige Funktioner, som tilfredsstille Funktionalligningen

$$f(x+y) = af(x)f(y) + bf(x+\omega)f(y+\omega),$$

hvor a, b og ω ere givne Konstanter, forskjellige fra Nul.

(J. L. W. V. Jensen).

Ligningen giver for $y = 0$

$$f(x) = af(x)f(0) + bf(x+\omega)f(\omega),$$

altsaa

$$\frac{f(x+\omega)}{f(x)} = \frac{f(y+\omega)}{f(y)} = \frac{1 - af(0)}{bf(\omega)} = k,$$

hvilket, indsat i Fundamentalligningen, giver denne Formen

$$f(x+y) = k_1 f(x) f(y),$$

hvoraf

$$f'(x+y) = k_1 f'(x) f(y) = k_1 f(x) f'(y),$$

altsaa

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f(y)}{f'(y)} = k_2,$$

som integreres ved $y = c\,.\,e^{k_2 x} = cn^x$.

Konstanterne bestemmes ved Indsættelse i den oprindelige Ligning,

hvorved man faar $f(x) = \dfrac{n^x}{a + bn^{2\omega}}$.

(A. S. Bang).

538. Find Værdien af

$$\int \frac{2P^3P' + 5PP'P'' - 4(P')^3 - P^2P'''}{2P^4 - PP'^2 - P^2P''}\,dx,$$

hvor P er en hvilken som helst Funktion af x, P', P'' og P''' dens 1ste, 2den og 3die afledede Funktion.

(P. Foldberg).

Integralet deles i

$$4\int \frac{8P^3P' - P'^3 + P^2P'''}{2P^4 - PP'^2 + P^2P''}\,dx - 5\int \frac{6P^2P' - P'P'' + PP'''}{2P^3 - P'^2 + PP''}\,dx$$

$$= 4l(2P^4 - PP'^2 + P^2P''') - 5l(2P^3 - P'^2 + PP'') + C$$

$$= l\,\frac{cP^4}{2P^3 - P'^2 + PP''}$$

(A. S. Bang).

539. Idet x, y og z betegne et bevægeligt Punkts Afstande fra tre faste Punkter, ønskes — ad elementær Vej — bestemt de fire faste Punkter, der svare til Minimum af $x + y \pm z$, $x^2 + y^2 \pm z^2$.

(N. Madsen).

Det bevægelige Punkt kaldes O, de faste Punkter A, B og C.

1. $x + y + z$ skal være Minimum. AO maa være Normal til Ellipsen gjennem O med B og C til Brændpunkter; heraf følger $\angle AOB = \angle AOC$. Analogt faas $\angle AOB = \angle COB$. Altsaa: $\angle AOB = \angle AOC = \angle COB = 120^0$, hvorved O let konstrueres.

2. $x + y - z$ skal være Minimum.

Ved en lignende Fremgangsmaade (idet man for AC's og BC's Vedkommende faar Hyperbler i Stedet for Ellipser) findes: $\angle AOC = \angle BOC = 60^0$.

3. $x^2 + y^2 + z^2$ skal være Minimum. Man tegner en Cirkel gjennem O med BC's Midtpunkt D som Centrum; lader man O bevæge sig paa denne Cirkel, bliver $y^2 + z^2$ konstant. I Tilfælde af Minimum maa derfor AO være Normal til Cirklen, d. v. s. gaa gjennem D. Analogt findes, at BO maa gaa gjennem AC's Midtpunkt. O bliver altsaa $\triangle ABC$'s Tyngdepunkt.

4. $x^2 + y^2 - z^2$ skal være Minimum. Lader man O bevæge sig paa $OE \perp AC$, bliver $x^2 - z^2$ konstant; i Tilfælde af Minimum maa man altsaa have $BO \perp OE$ eller $BO \neq AC$. Ligeledes findes, at $AO \neq BC$.

(C. Rosenberg).

528. Givet en Cirkel C med Radius r og en ret Linie af Længde a ($a > r$). Der søges Fællestangenten til den givne Cirkel og til en Cirkel A med Radius a og med Centrum i den givne Cirkels vandrette Diameter, idet Røringspunktet for Cirklen A skal ligge paa C's lodrette Diameter.

(P. N. Holst).

Lad Røringspunktet være B; da kan Trekanten ABC konstrueres, idet man ved at lægge a fast, faar som geometrisk Sted

for A en Halvcirkel over a samt en ret Linie vinkelret paa a i Afstanden r fra B.

(A. S. Bang).

530. Konstruer en Trekant, naar man kjender Halveringslinien v_A, Vinklen mellem v_A og a, samt Produktet af de Stykker, hvori v_A deler A.

(P. Foldberg).

Lad v_A skjære a i D. Drejes da BC om v_A, saa at C falder i Punktet C_1 af AB, vil Opgaven være reduceret til gjennem et givet Punkt (A) at trække en ret Linie, som af en given Vinkel (BDC_1) afskjærer et givet Areal, hvilken er den bekjendte Apolloniske Opgave.

(A. S. Bang).

OPGAVER TIL LØSNING.

541 [1]. Naar t er Produktet af et ulige Antal Primtal, skal vises, at Summerne af de tredie, anden, første og nulte Potenser af Tallene mindre end og primiske med t forholde sig som de tilsvarende Summer af Tallene mindre end t.

(A. S. Bang).

546. n Ægtepar tage ved Lodtrækning Plads om et Bord saaledes, at de skulle sidde afvexlende Mand og Kvinde. Hvor mange Grupperinger ere mulige, naar ingen Mand maa sidde ved Siden af sin Kone? Hvor mange Mænd ville i en Gruppering gjennemsnitlig komme til at sidde ved Siden af deres Koner, og hvilken er Middelafvigelsen til dette Gjennemsnit?

(S. Hertzsprung).

547. Hvor mange forskjellige Cifre findes der gjennemsnitlig i et m-cifret Tal?

(S. Hertzsprung).

548. Hvilken Kurve skal man lade rulle paa en ligesidet Hyperbel, for at et Punkt i fast Forbindelse med den rullende Kurve skal beskrive Hyperblens Asymptote? (C. Juel).

---

[1]) Gjentages paa Grund af en indløben Trykfejl.

549. **Bevis, at Ligningen**

$$\begin{vmatrix} m_1x_2x_3 & m_2x_3x_1 & m_3x_1x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}^2 - 4ax_1x_2x_3\varphi_x\varphi_\lambda = 0,$$

hvor $a = x_1 + x_2 + x_3$, $\varphi_x = m_1x_2x_3 + m_2x_3x_1 + m_3x_1x_2$,
og $$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$
fremstiller en Kurve, som har 5 Spidser paa $\varphi_x = 0$, **at Tangenterne i disse Spidser alle gaa igjennem et Punkt, hvori** $\varphi_x = 0$ **rører Kurven, og at Forbindelseslinien mellem hver to af Spidserne rører Kurven.**

(E. C. Valentiner).

OPGAVER TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN.

57. Vis, at Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{vmatrix} = x^{n-1}(x + a_1 + a_2 + \dots a_n).$$

58. Et Laan forrentes og afdrages i n Terminer med en konstant Annuitet, saaledes at p pro Cent af den til enhver Tid tilbagestaaende Restgjæld er Rente, det øvrige Afdrag. Hvad er, ved en Rentefod af p p. Ct., Værdien af samtlige fremtidige Afdrag henført til det Tidspunkt, da første Afdrag sker.

(J. P. Gram).

59. I en indskrivelig og omskrivelig Firkant er givet Diagonalerne og deres Vinkel, find Siderne.

(E. C. Valentiner).

MINDRE MEDDELELSER.

Dodekaedrets Rumvinkel bestemmes lettest derved, at den fremkommer, naar en regulær Femkant $ABCDE$ (med Centret O) drejes om Siden AB, indtil C's Projektion C_1 paa Planen i sin oprindelige Stilling falder i Forlængelsen af OB. C_1 har da gjennemløbet en ret Linie vinkelret paa AB. Lad CC_1 skjære AB i P. Man har da $\angle BCP = 18^0$; $\angle BC_1P = 36^0$, og faar altsaa

$$\cos v = -\frac{PC_1}{PC} = -\frac{tg\, 18^0}{tg\, 36^0} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

eller

$$tg\, v = -2.$$

Derefter beregnes let Kugleradierne.

(N. Madsen).

LITERATUR.

W. G. Spencer: Populær Geometri til Brug ved den første Undervisning. Paa Dansk ved Georg Bendix. Kbhvn. 1886.

Denne Bog indeholder omtrent et Hundrede Definitioner af geometriske Begreber og henved halv femte Hundrede Opgaver.

De geometriske Begreber, Forfatteren har medtaget, ere omtrent de samme som i vore sædvanlige elementære Lærebøger i Plangeometri; men desuden ere de trigonometriske Linier (lige til Tværsinus og Tværcosinus) og Keglesnitslinierne (Axer, Brændpunkter) definerede. Af Legemer ere beskrevne: de regelmæssige Legemer, det retvinklede Parallelepipedum, Pyramidestubben, Cylindren, Kuglen, Keglen og Omdrejningsellipsoiderne; derimod forudsættes Pyramiden og Prismet bekjendte, og Tærningen er det Legeme, der først præsenteres Barnet, og som derfor skal lægge

Grunden til dets Forestilling om et Legemes tre Dimensioner. Dette er ikke heldigt, da Tærningens tre Dimensioner ere lige store, og der maa være en Forskjel, naar Barnet skal kunne opfatte Forskjellen; det retvinklede Parallelepipedum med ulige lange Kanter vilde have været mere oplysende, og det vilde have været let nok at give nærliggende Exempler (Klasseværelset, en Tegnekasse, en Bog o. s. v.). En Flades Dimensioner kaldes Længde og Bredde, en Linies kaldes Længde, og der paastaas S. 8, at »en Flade ikke har nogen Højde«, og at »en Linie hverken har Bredde eller Højde«; dette er ikke stemmende med dansk Sprogbrug: den Dimension, som en Flade mangler, er Tykkelse [1]), og de to Dimensioner, som en Linie mangler, ere Bredde og Tykkelse [1]). — Definitionerne, der findes spredte mellem Opgaverne, udmærke sig ikke altid ved Klarhed og Præcision (Expl. Plan S. 8; Diameter S. 11; Stjerne S. 39); nogle Navne ere brugte i en anden Betydning end den, hvori de bruges i danske Lærebøger (Expl. Regulær Rhombe S. 12; Tangentvinkel S. 47); og enkelte Begreber ere indførte uden Definition (Expl. Ligedannede Figurer, S. 20; Symmetriske Firkanter S. 23).

Af Opgaverne er der nogle, der skulle øve Barnet i at se med Eftertanke paa materielle Legemer, (af hvilke en Samling vel maa forudsættes at være til Stede som Hjælpemiddel ved Undervisningen), andre, der forlange en Eftergjørelse af disse ved Udskjæring i Træ eller ved Sammenklistring af Udfoldninger, som Disciplen selv har tegnet og klippet ud. De nævnte Opgaver maa antages kun at skulle tjene som Vejledning for en uøvet Lærer; thi enhver, der indleder Undervisningen i Geometri — saaledes som det er paabudt i kgl. Anordn. af 5te Aug 1871, § 2 — »med en paa Betragtning af materielle Former støttet Abstraktion af de første geometriske Begreber«, er vant til at stille sine Disciple mange Hundrede Opgaver af denne Art [2]). Til samme Kategori

[1]) Begge disse Steder, hvor der i Oversættelsen staar »Højde«, staar der i den engelske Original »thickness«.

[2]) Et ikke meget kjendt men brugbart Apparat hertil er: Alb. Andresen og Chr. V. Nielsen: Udfoldninger af Grundformerne i Rummet.

henhøre en Del Tegneopgaver, ved hvis Udførelse Disciplen skal vise, at han har forstaaet de fremsatte Definitioner; enhver nogenlunde omhyggelig Lærer er ogsaa vel kjendt med denne Slags Opgaver, og plejer at stille dem massevis.

De øvrige Opgaver forlange enten Bevis for en eller anden geometrisk Sætning, eller de ere plangeometriske Konstruktionsopgaver. Det er dog ikke Meningen, at Beviserne for Sætningerne skulle være almengyldige: Disciplen skal i Regelen tegne en Figur, der opfylder de givne Betingelser, og saa skal han paa en eller anden Maade (ved Maaling, Udklipning o. s. v.) prøve, om den i Sætningen udtalte Paastand er rigtig i dette enkelte Tilfælde. Det er heller ikke Meningen, at Konstruktionsopgaverne skulle løses ved Lineal og Passer alene[1]): Gradmaaler (Transportør), Kordeskala, Tangensmaaler og andre forunderlige Instrumenter staa til Disciplens Raadighed; og det maa antages, at mange af Opgaverne skulle løses saa godt som muligt ad Forsøgets Vej. Paa anden Vis maa det være umuligt for Disciplen at løse f. Ex. Opg. 23: Tegn to Cirkler, der røre hinanden i et enkelt Punkt (umiddelbart efter Cirklens Definition); eller f. Ex. Opg. 70: Tegn to parallele Linier (umiddelbart efter Definitionen af parallele Linier, ɔ: Linier i samme Plan, der ikke skjære hinanden o. s. v.).

Oversætteren har med Rette kaldet Bogen »Populær Geometri« (Originalen hedder »Inventional Geometry«). Den kan muligvis bruges ved en Geometri-Undervisning, hvis vigtigste Maal er den elementære Plangeometris Resultater (særlig de i Praxis forekommende Konstruktioner og Arealberegninger), men ved hvilken det er af underordnet Betydning, ad hvilke Veje eller Gjenveje disse Resultater naas, naar blot Disciplen bringes til at tro paa

---

[1]) I en Note til Opgave 22 siges: »Til Opgavernes Løsning benyttes Lineal og Passer«; men om dette gjælder denne ene Opgave, der bestaar af flere mindre Opgaver, eller alle følgende Konstruktionsopgaver, kan ikke forstaas. Denne Note er Oversætterens Anmærkning. I Fortalen til den engelske Original siger Forfatteren derimod: »The greater part of the questions . . . . require for their answers geometrical figures and diagrams, accurately constructed by means of a pair of compasses, a scale of equal parts, and a contractor.«

deres Rigtighed. Men i en højere Almenskole, f. Ex. Latin- og Realskoler, hvor Mathematikens Rolle som Undervisningsfag væsentlig er »formende« — for at bruge Prof. Kromans Udtryk — og først i anden Række er »fyldende«, dér vil en Undervisning paa Grundlag af denne Bog skyde uden om Maalet, selv om den kun bruges som Indledning til den exakte Undervisning i Geometri, hvortil den anbefales i Oversætterens Fortale. Det kan kun være til Skade for et Barns Udvikling, at man i nogle Aar vænner det til empiriske Beviser og ugeometriske Konstruktioner, naar man senere skal lære det, at saadanne Beviser ere værdiløse i Geometrien, og saadanne Konstruktioner ere stridende mod alle Vedtægter; og det er til ingen Nytte, at man ved den indledende Undervisning propper et Barns Hukommelse med de mange og saadanne Detaljer, som denne Bog indeholder. Den Selvudvikling, hvori Disciplens Fremgang efter Herbert Spencers Anskuelse først og fremmest bør bestaa, fremmes netop i høj Grad ved den exakte Undervisning i Geometri og Arithmetik, naar blot Læreren lægger den saaledes an, at han leder sine Disciple til selv at opdage Sætningerne og finde Konstruktionerne; at dette er muligt paa de aller fleste Punkter af Undervisningen, i al Fald saa længe der ikke er Tale om forceret Examenslæsning, er der ingen Tvivl om, og Læremidler savne vi ikke.

Til Slutning en Bemærkning om Sproget. I Fortalen siger Oversætteren: »Sproget . . . . . er her mere blevet Barnets eget Sprog; næsten alle Spørgsmaal begynde med: Kan du — prøv, om du kan o. l.« Naar undtages denne direkte Tiltale, som alle Lærere vel anvende Snese af Gange hver eneste Dag, selv om Opgavesamlingerne bruge det mere barske Imperativ eller det mere upersonlige Infinitiv, har Sproget i det hele taget den sædvanlige »kortfattede, bestemte« Form, som bruges i næsten alle mathematiske Lærebøger; de første Sider give Exempler nok herpaa.

Helsingør Latin- og Realskole d. 15. Oktober 1886.

Chr. Krüger.

Acta Mathematica.

Zeitschrift	Journal
herausgegeben von	rédigé par

G. Mittag-Leffler.

Redaction:

Sverige.

A. V. Bäcklund,
Lund.

A. Th. Daug,
Upsala.

H. Gyldén,
Stockholm.

Sophie Kowalevski,
Stockholm.

G. Mittag-Leffler,
Stockholm.

Norge.

C. A. Bjerknes,
Christiania.

O. J. Broch,
Christiania.

S. Lie,
Christiania.

L. Sylow,
Frederikshald.

Danmark.

L. Lorenz,
Kjøbenhavn.

J. Petersen,
Kjøbenhavn.

H. G. Zeuthen,
Kjøbenhavn.

Finland.

L. Lindelöf,
Helsingfors.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Side

Om Momentsætningen i Statiken. Af *H. G. Zeuthen* 145

Nogle Bemærkninger om en Klasse kombinatoriske Opgaver. Af *S. Hertzsprung* 154

En Flade, fra hvilken Straaler, udgaaende fra et fast Punkt, tilbagekastes parallel med en given Plan og gjennem en given Linie vinkelret paa denne. Af Fyringeniør *J. S. Fleischer* . . 164

Om den mathematiske Behandling af Gnidningsmodstanden. Af *H. G. Zeuthen* 168

Antallet af fri Bevægelser i et leddet Stangsystem. Af *Kr. Birkeland* 174

Examensopgaver 176

Løsning af Opgaverne 195, 241, 266, 411, 502, 538, 539, 528 og 530 180

Opgaver til Løsning 187

Opgaver til Brug ved Undervisningen 188

Mindre Meddelelser 189

Literaturanmeldelse 189

(Hermed en Figurtavle, hørende til Dr. Guldbergs Afhandling i forrige Hefte).

